Redazione: 30, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia Matematica, 7, via Villareale, Palermo.
Proto-Compositore: Gaetano Senatore.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XIX. — ANNO 1905.

PARTE PRIMA: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

30, via Ruggiero Settimo, 30.

1905

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Dell'Ufficio di Presidenza.

Art. 14. — La rappresentanza e la direzione amministrativa della Società spetta all'*Ufficio di Presidenza*, costituito dagli ufficiali della Società: 1 presidente, 1 vice-presidente, 2 segretari, 2 vice-segretari, 1 tesoriere, 2 bibliotecari, eletti dai soci residenti, nel proprio seno, a scrutinio segreto. L'Ufficio di Presidenza rimane in carica due anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 15. — Per l'elezione dell'Ufficio di Presidenza si terrà apposita adunanza straordinaria nella 1ª domenica di gennajo. Prendono parte alla votazione soltanto i soci presenti. Ove durante il biennio rimanga vacante una carica dell'Ufficio di Presidenza, i soci residenti saranno convocati in apposita adunanza straordinaria per l'elezione del titolare.

Del Consiglio Direttivo.

Art. 16. — La direzione scientifica della Società è affidata ad un *Consiglio Direttivo*, il quale funziona da Comitato di redazione della rivista periodica « *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* », secondo le norme di un suo regolamento interno.

Art. 17. — Il Consiglio Direttivo è composto di 20 membri, 5 residenti e 15 non residenti, eletti dall'intera società a scrutinio segreto. In ognuna delle due categorie risultano eletti i soci che riportano maggior numero di voti. Qualora l'elezione, per parità di voti, riuscisse indecisa fra due o più candidati, si procederà a votazioni di ballottaggio, alle quali prenderanno parte soltanto i soci presenti all'adunanza. Il Consiglio Direttivo rimane in carica tre anni. Tutti i suoi membri sono rieliggibili.

Art. 18. — Per l'elezione del Consiglio Direttivo si terrà apposita adunanza straordinaria nella terza domenica di gennajo. — Ogni socio non residente, come ogni socio residente che non possa intervenire alla detta adunanza, invierà in una lettera da lui sottoscritta e diretta al Presidente, una scheda chiusa e suggellata indicante 20 nomi di soci, dei quali: 5 residenti e 15 non residenti. Saranno considerate nulle le schede che non soddisfano a tutte le condizioni sopra stabilite o che pervengano all'Ufficio di Presidenza dopo le ore 3 pomeridiane del suindicato giorno. Lo spoglio delle schede sarà fatto dal Presidente assistito dai segretari.

Art. 19. — Non vi è incompatibilità di carica fra i membri dell'Ufficio di Presidenza ed i membri residenti del Consiglio Direttivo.

Art. 20. — Entrando in carica, il Consiglio Direttivo delegherà uno dei suoi membri residenti a dirigere la pubblicazione dei *Rendiconti*.

Delle adunanze.

Art. 21. — Le adunanze ordinarie del Circolo si terranno la seconda e la quarta domenica del mese. La società prende due mesi di vacanza: settembre ed ottobre. Il Presidente, ove lo reputi opportuno, può, in ogni tempo, convocare i soci residenti in adunanza straordinaria.

Art. 22. — Nelle adunanze, in caso di assenza del Presidente e del Vice Presidente, il più anziano di età fra i soci presenti funzionerà da Presidente. In caso di assenza dei Segretari e dei Vice Segretari, chi presiede inviterà uno dei soci presenti a farne le veci.

Art. 23. — Entro il mese di gennajo, di ogni anno, il Presidente convocherà i soci residenti in apposita adunanza straordinaria per la revisione dei conti dell'anno decorso e l'approvazione del bilancio di previsione.

Art. 24. — Nelle adunanze del Circolo non è ammessa alcuna comunicazione o discussione sopra argomenti estranei all'indole scientifica e allo scopo della Società.

Art. 25. — Tutto ciò che riferiscesi all'amministrazione del Circolo, può essere trattato, esclusivamente, nelle adunanze straordinarie, per le quali il Presidente formulerà e parteciperà, con precedenza, ai soci residenti, apposito ordine del giorno.

Art. 26. — Le dimissioni da socio del Circolo non possono essere oggetto di discussione nè di votazione.

Art. 27. — Nelle adunanze ordinarie il Circolo è legalmente costituito qualunque sia il numero dei soci presenti. Nelle adunanze straordinarie, tranne quelle di cui agli Art. 15 e 18, è necessaria una seconda convocazione quando nella prima non sia intervenuta almeno la metà più uno dei soci residenti.

Art. 28. — Nelle adunanze ordinarie le Comunicazioni dei soci residenti si succedono per ordine d'iscrizione. Saranno precedute dalla lettura che farà il Segretario

dei titoli delle Comunicazioni dei soci non residenti, pervenute all'Ufficio di Presidenza nell'intervallo tra un'adunanza e l'altra.

ART. 29. — Rientra nelle speciali attribuzioni del Presidente tutto ciò che riferiscesi al regolamento delle adunanze ordinarie e straordinarie.

ART. 30. — I soci non residenti che si trovino temporaneamente in Palermo godono di tutti i diritti dei residenti e partecipano alle votazioni, meno quelle di cui agli Art. 15, 23 e 45.

ART. 31. — Le persone estranee che desiderano assistere alle adunanze ordinarie del Circolo, debbono, ciascuna volta, essere introdotte da uno dei soci.

Dei Rendiconti.

ART. 32. — Nei *Rendiconti* del Circolo si pubblicano, per obbligo: 1° Gli *Estratti dai verbali* delle adunanze (redatti dai Segretari), i quali contengono il titolo e, ove occorra, un breve cenno delle comunicazioni dei soci. 2° Le Note e le Memorie originali comunicate dai soci ed accettate per la stampa dal Comitato di redazione. 3° Un bollettino bibliografico della produzione matematica nazionale e straniera, il quale comprende: *a)* il sommario degli articoli di matematica contenuti nelle pubblicazioni *periodiche* (atti di Accademie, riviste, giornali, etc.) colle quali il Circolo scambia i suoi *Rendiconti; b)* l'elenco delle pubblicazioni di matematica *non periodiche* (opere, memorie, note, etc.) che pervengono in dono alla Biblioteca del Circolo.

ART. 33. — Per tutto che concerne la rivista *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* il Consiglio Direttivo potrà attuare quelle riforme ed estensioni che stimerà opportune per accrescerne l'importanza scientifica e meglio soddisfare alle esigenze dei cultori delle scienze matematiche.

ART. 34. — Gli *Estratti dai verbali* non riproducono le discussioni scientifiche che si fanno nelle adunanze del Circolo; tuttavia se i soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a rimettere al Segretario, nell'adunanza istessa, una Nota per iscritto, la quale, in ogni caso, non potrà eccedere lo spazio di una pagina dei *Rendiconti.*

ART. 35. — Le Note, Memorie e Riviste bibliografiche destinate ai *Rendiconti* dovranno essere inedite e scritte in una delle seguenti lingue: italiana, latina, spagnuola, francese, tedesca, inglese; non potranno pubblicarsi a parte o inserirsi in altri periodici scientifici se non dopo che saranno state pubblicate dal Circolo. Gli Autori ne assumono, essi soli, la responsabilità scientifica.

Della Biblioteca.

ART. 36. — Il Circolo forma una Biblioteca e scambia i suoi *Rendiconti* colle raccolte scientifiche, nazionali e straniere.

ART. 37. — I libri, gli opuscoli e le raccolte periodiche acquistati o ricevuti in dono, o in cambio dei *Rendiconti,* restano di proprietà esclusiva del Circolo; in caso di scioglimento della Società passan di pien diritto alla Biblioteca Comunale di Palermo.

ART. 38. — Il regolamento speciale della Biblioteca, approvato dai soci residenti, potrà stabilire le norme per accordare a domicilio, a' soci residenti e non residenti, l'uso temporaneo degli opuscoli scientifici.

ART. 39. — Sui fondi provenienti dalle contribuzioni annue dei soci, non può essere stanziata alcuna somma per la Biblioteca.

Delle entrate e delle spese.

ART. 40. — Le entrate del Circolo sono: 1° le contribuzioni dei soci; 2° il prodotto della vendita dei *Rendiconti;* 3° i sussidii e doni che il Circolo potrà ricevere da privati o da enti morali.

ART. 41. — Le spese del Circolo si dividono in ordinarie e straordinarie. Le spese ordinarie sono: 1° le spese d'ufficio, inclusavi l'annua pigione del locale per la sede del Circolo; 2° le spese di stampa e spedizione dei *Rendiconti.* Per ogni spesa straordinaria è necessaria deliberazione dell'assemblea dei soci residenti.

ART. 42. — Il Tesoriere ha la gestione economica degli affari sociali, tanto attivi che passivi, impiega i fondi disponibili, provvede alle spese ordinarie ed a quelle straordinarie votate dall'assemblea dei soci residenti.

∴

ART. 43. — Rimangono abrogati tutti gli articoli dello Statuto provvisorio del 2 marzo 1884.

ART. 44. — Qualunque proposta per aggiunta o modificazione al presente Statuto dovrà essere sottoscritta da almeno 30 soci ed approvata dalla Società colla maggioranza di almeno $^2/_3$ dei votanti.

ART. 45. — Nel caso di scioglimento della Società, l'assemblea generale dei soci residenti, coll'intervento di almeno $^2/_3$ dei medesimi, delibererà sulla destinazione dei fondi rimasti disponibili.

ARTICOLO TRANSITORIO. — Le prime elezioni per l'Ufficio di Presidenza e pel Consiglio Direttivo saranno fatte dall'assemblea dei soci residenti, convocati in apposita adunanza straordinaria.

UFFICIO DI PRESIDENZA

PEL BIENNIO 1904-1905

(eletto dai Soci residenti nell'adunanza del 10 maggio 1904):

ALBEGGIANI (M. L.), Presidente. — **GEBBIA**, Vice Presidente. — **DI SIMONE** e **GUERRA**, Segretari. — **LA MENSA** e **POLITI**, Vice Segretari. — **PORCELLI (S.)**, Tesoriere. — **ALAGNA** e **PEPOLI**, Bibliotecari.

CONSIGLIO DIRETTIVO *)

(COMITATO DI REDAZIONE DEI «RENDICONTI»)

PEL TRIENNIO 1903-1904-1905

(eletto dall'intera Società il 18 gennajo 1903):

ALBEGGIANI (M. L.) (Palermo), **BIANCHI** (Pisa), **CAPELLI** (Napoli), **CERRUTI** (Roma), **DEL PEZZO** (Napoli), **DEL RE** (Napoli), **DINI** (Pisa), **GEBBIA** (Palermo), **GUCCIA** (Palermo), **LORIA** (Genova), **MITTAG-LEFFLER** (Stockholm), **PASCAL** (Milano), **PEANO** (Torino), **PINCHERLE** (Bologna), **POINCARÉ** (Paris), **TONELLI** (Roma), **TORELLI** (Palermo), **VOLTERRA** (Roma), NN., NN.

Direttore dei "Rendiconti",: **GUCCIA.**

*) Negli anni trascorsi fecero parte del Consiglio Direttivo i defunti soci: **GIUSEPPE ALBEGGIANI** (1888-1892), **GIUSEPPE BATTAGLINI** (1888-1894), **EUGENIO BELTRAMI** (1888-1900), **ENRICO BETTI** (1888-1892), **FRANCESCO BRIOSCHI** (1888-1897), **FELICE CASORATI** (1888-1890), **LUIGI CREMONA** (1888-1903) e **RICCARDO DE PAOLIS** (1888-1892).

ELENCO DEI SOCI

(26 MARZO 1905).

* contrassegna i nomi di coloro che il 2 marzo 1884 sottoscrissero il primo Statuto della Società.
† contrassegna i nomi dei *Soci perpetui* (Art. 11 del vigente Statuto del 26 febbrajo 1888).

Al nome del socio seguono, fra parentesi [ ]: 1° il *luogo* e la *data* di nascita; 2° la *data* d'ammissione; 3° il *numero d'ordine* d'ammissione; 4° (in fine) l'*indirizzo*. — Ai 27 soscrittori dello Statuto provvisorio del 2 marzo 1884 fu assegnato il *numero d'ordine* giusta l'ordine alfabetico dei loro nomi.

ACKERMANN-TEUBNER (Alfred) [Leipzig (Sachsen) (Deutschland): 31.1.1857] [10.5.1903] [318], Verlagsbuchhändler, in Firma « B. G. Teubner »; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Mitglied der Société Mathématique de France. *[Poststr. 3 — Leipzig (Deutschland)].*

ADHÉMAR (Vicomte Robert d') [Saint-Hippolyte-du-Fort (Gard) (France): 1.11.1874] [12.2.1905] [358], ancien élève de l'École Centrale de Paris; ingénieur des Arts et Manufactures; docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Société Mathématique de France, de la Société Scientifique de Bruxelles, de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; professeur de Calcul intégral à la Faculté libre des Sciences de Lille. *[Place de Genevières, 14 — Lille (Nord) (France)].*

AGUGLIA (Gaetano) [Termini Imerese (Palermo) (Italia): 21.4.1877] [13.12.1903] [325], dottore in Matematica; insegnante nella R. Scuola Tecnica e nel R. Ginnasio di Termini Imerese. *[R. Scuola Tecnica — Termini Imerese (Prov. di Palermo) (Italia)].*

* **ALAGNA** (Rosario) [Partanna (Trapani) (Italia): 12.7.1853] [2.3.1884] [1], ingegnere; bibliotecario del Circolo Matematico di Palermo; libero docente di Analisi algebrica nella R. Università di Palermo; professore nella R. Scuola Normale Femminile di Palermo. *[Via Cappuccini, 9 — Palermo (Italia)].*

ALASIA DE QUESADA (Cristoforo) [Sassari (Italia): 21.11.1869] [9.12.1900] [283], licenziato in Scienze Fisiche e Matematiche; membro della Société Belge d'Astronomie; prof. nel R. Ginnasio di Tempio Pausania. *[R. Ginnasio — Tempio Pausania (Prov. di Sassari) (Italia)].*

* **ALBEGGIANI** (Michele Luigi) [Palermo (Italia): 7.3.1852] [2.3.1884] [3], ingegnere; corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Presidente, e membro del Consiglio Direttivo, del Circolo Matematico di Palermo; libero docente di Geometria analitica nella R. Università di Palermo; prof. inc. di Applicazioni della Geometria descrittiva nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Palermo; prof. di Matematica, e vice preside, nel R. Istituto Tecnico « Filippo Parlatore » di Palermo. *[Salita Banditore, 4 — Palermo (Italia)].*

ALMANSI (Emilio) [Firenze (Italia): 15.4.1869] [12.3.1899] [271], ingegnere; dottore in Matematica; prof. straord. di Fisica matematica nella R. Università di Genova. *[Corso Solferinò, 24 — Genova (Italia)].*

ALVAREZ UDE (Don José G.) [Madrid (España): 18.3.1876] [12.2.1905] [359], Dr. en Ciencias Fisico Matemáticas; Catedrático de Geometria descriptiva y Geometria de la posicion en la Facultad de Ciencias de Zaragoza. *[Calle del 4 de Agosto, 7 y 9, 2° — Zaragoza (España)].*

AMALDI (Ugo) [Verona (Italia): 18.4.1875] [26.5.1901] [295], dott. in Matematica; professore straord. di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Cagliari. *[R. Università — Cagliari (Italia)].*

AMANZIO (Domenico) [Marano (Napoli) (Italia): 2.2.1854] [8.4.1894] [204], dottore in Matematica; socio dell'Accademia Pontaniana; prof. nel R. Collegio Militare e nel R. Istituto Tecnico « Giovan Battista della Porta » di Napoli. *[Corso Vittorio Emanuele, 113 — Napoli (Italia)].*

AMATO (Vincenzo) [Taranto (Lecce) (Italia): 2.1.1881] [8.11.1903] [324], dottore in Matematica; socio corrispondente dell'Accademia degli Zelanti di Acireale; inc. dell'insegnamento delle Matematiche nel R. Ginnasio di Adernò. *[R. Ginnasio — Adernò (Prov. di Catania) (Italia)].*

AMATURO (Enrico) [Salerno (Italia): 22.5.1863] [12.8.1888] [127], dottore in Matematica; ingegnere civile; libero docente di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università di Napoli; assistente alla cattedra di Applicazioni di Geometria descrittiva nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. *[Piazza dei Vergini, 56— Napoli (Italia)].*

AMICI (Nicola) [Acquasanta (Ascoli Piceno) (Italia): 21.10.1866] [11.3.1894] [201], dottore in Matematica; prof. nel R. Istituto Tecnico « Alberigo Gentili » di Macerata. *[R. Istituto Tecnico — Macerata (Italia)].*

AMODEO (Federico) [Avellino (Italia): 8.10.1859] [24.4.1887] [64], dottore in Matematica; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; libero docente di Geometria projettiva con disegno e di Storia delle Scienze Matematiche nella R. Università di Napoli; professore nel R. Istituto Tecnico « Giovan Battista della Porta » di Napoli. *[Via S. Gennaro ad Antignano, 16 — Napoli (Italia)].*

ANDRÉ (Désiré) [Lyon (Rhône) (France): 29.3.1840] [23.3.1890] [160], ancien élève de l'École Normale supérieure de Paris; agrégé de l'Université; docteur ès Sciences mathématiques; membre et ancien président de la Société Philomathique de Paris; membre et ancien président de la Société Mathématique de France; membre de la « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées;* professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Collège Stanislas; professeur d'Analyse à l'Institut Catholique de Paris. *[Rue Bonaparte, 70bis — Paris, VIe (France)].*

ANGELITTI (Filippo) [Ajelli (Aquila) (Italia): 1.5.1856] [27.11.1898] [259], ing.; dottore in Matematica; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio corrispondente della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio ordinario della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; prof. ord. di Astronomia nella R. Università di Palermo; direttore del R. Osservatorio Astronomico di Palermo. *[R. Osservatorio Astronomico, Palazzo Reale — Palermo (Italia)].*

APPELL (Paul) [Strasbourg (Alsace): 27.9.1855] [12.4.1891] [174], membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); membre et ancien président de la Société Mathématique de France; membre de la Société Philomathique de Paris; docteur (honoris causa) en Mathématique de l'Université de Christiania; collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées;* doyen, et professeur de Mécanique rationnelle, à la Faculté des Sciences de Paris; professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures de Paris; répétiteur à l'École Polytechnique de Paris. *[Rue Bonaparte, 17 — Paris, VIe (France)].*

AUTONNE (Léon) [Odesse (Russie): 28.7.1859] [26.1.1896] [227], ancien élève de l'École Polytechnique de Paris; ingénieur des Ponts et Chaussées; docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Société Mathématique de France; membre de la Société Mathématique de Moscou; maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lyon. *[Rue Montbernard, 9 — Lyon (Rhône) (France)].*

BAGNERA (Giuseppe) [Bagheria (Palermo) (Italia): 14.11.1865] [22.12.1889; 27.3.1904] [153], ingegnere; dottore in Matematica; socio ordinario della Reale Accademia Peloritana di Messina; prof. straord. di Algebra complementare e Geometria analitica, ed inc. di Analisi superiore, nella R. Università di Messina. *[R. Università— Messina (Italia)].*

BARBIERI (Armando) [Modena (Italia): 13.12.1878] [10.7.1904] [335], dottore in Matematica; assistente onorario nella R. Università di Modena; inc. alle classi aggiunte nel R. Liceo « Ludovico Antonio Muratori » di Modena. *[Via Maraldo, 8— Modena (Italia)].*

BARBIERI (Ubaldo) [Modena (Italia): 2.6.1874] [28.4.1901] [294], dott. in Matematica; assistente alle cattedre di Geodesia e Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Roma. *[Piazza S. Maria Maggiore, 12 — Roma (Italia)].*

BARRESI (Francesco Paolo) [Palermo (Italia): 23.12.1875] [28.4.1901] [293]. *[Banco di Sicilia — Mazzara del Vallo (Prov. di Trapani) (Italia)].*

BASILE (Ernesto) [Palermo (Italia): 31.1.1857] [26.8.1888] [128], architetto; acc. di merito della Romana Accademia di Belle Arti di S. Luca; socio onorario delle Reali Accademie di Belle Arti di Milano, Bologna, Firenze, Carrara e Venezia; socio corrispondente della Reale Accademia Raffaello in Urbino; prof. onorario del Reale Istituto di Belle Arti di Napoli; socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; direttore dei lavori del Teatro Massimo di Palermo; direttore e professore di Architettura del R. Istituto di Belle Arti in Palermo; consigliere effettivo della Giunta superiore di Belle Arti; prof. ordinario di Architettura tecnica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Palermo. *[Via Siracusa, 15 — Palermo (Italia)].*

BERRY (Arthur) [London (England): 28.12.1862] [26.3.1905] [387], M. A.; Fellow of the Royal Astronomical Society, of the Cambridge Philosophical Society and of the Royal Statistical Society; Member of the London Mathematical Society, of the American Mathematical Society and of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Fellow of University College, London; Fellow and Assistant Tutor in Mathematics, King's College, Cambridge, England. *[King's College—Cambridge (England)].*

BERTINI (Eugenio) [Forlì (Italia): 8.11.1846] [4.3.1888] [101], dott. in Matem.; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); membro libero del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma) e della Reale Accademia delle Scienze di Torino; prof. onorario della R. Università di Pavia; prof. ord. di Geometria superiore, ed inc. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno, nella R. Università di Pisa. *[R. Università — Pisa (Italia)].*

BERZOLARI (Luigi) [Napoli (Italia): 1.5.1863] [4.12.1887] [74], dott. in Matem.; socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* prof. ord. di Algebra complementare e Geometria analitica, e incaricato di Matematiche superiori, nella R. Università di Pavia. *[R. Università—Pavia (Italia)].*

BIANCHI (Luigi) [Parma (Italia): 18.1.1856] [24.12.1893] [195], dott. in Matem.; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); accademico nazionale non residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; corrispondente della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano) e della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; redattore degli *Annali di Matematica pura ed applicata;* prof. ord. di Geometria analitica, ed inc. di Matematiche superiori, nella R. Università di Pisa. *[R. Università — Pisa (Italia)].*

BLASERNA (Pietro) [Fiumicello presso Aquileja (Friuli orientale): 29.2.1836] [5.1.1896] [225], vice presidente del Senato; uno dei XL, e segretario, della Società Italiana delle Scienze (Roma); presidente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); membro d'onore della Reale Accademia di S. Cecilia e di quella di S. Luca, della Società di Fisica di Ginevra, della Società Elvetica delle Scienze, dell'Ateneo di Bergamo; corrispondente delle Reali Accademie di Torino, Napoli, Bologna e del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; socio onorario della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; membro della Società degli Spettroscopisti Italiani; dottore (honoris causa) di medicina della Kgl. Albertus-Universität Königsberg; consigliere-relatore dell'Ordine civile di Savoia; direttore dell'Ufficio centrale per il Corista Internazionale; membro, e segretario, del Comitato internazionale di Pesi e Misure; prof. ord. di Fisica sperimentale nella R. Università e direttore del R. Istituto Fisico di Roma. *[R. Istituto Fisico, Via di Panisperna, 89 — Roma (Italia)].*

BOGGIO (Tommaso) [Valperga (Torino) (Italia): 22.12.1877] [8.1.1905] [348], dot-

tore in Matematica; libero docente di Fisica matematica ed assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Torino. *[Via Valfrè, 18 — Torino (Italia)]*.

* **BONTADE** (Giovanni) [Palermo (Italia): 27.4.1857] [2.3.1884] [5], ing.; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo. *[Corso Scinà, 180—Palermo (Italia)]*.

BORDIGA (Giovanni) [Novara (Italia): 2.4.1854] [9.9.1888] [132], dottore in Matematica; socio corrispondente del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; libero docente, e incaricato dell'insegnamento di Geometria descrittiva, nella R. Università di Padova. *[S. Lio — Venezia (Italia)]*.

BORTOLOTTI (Ettore) [Bologna (Italia): 6.3.1866] [14.7.1889] [149], dottore in Matematica; prof. di Analisi algebrica ed inc. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Modena. *[Villa S. Agnese, 229 — Modena (Italia)]*.

BOTTINO (Francesco) [Palermo (Italia): 14.8.1855] [24.3.1889] [144], ingegnere civile; ingegnere di Miniere di Zolfo; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; prof. di Matematica nel R. Ginnasio Giovanni Meli; assistente al Gabinetto di Costruzioni nel R. Istituto Tecnico « Filippo Parlatore » di Palermo. *[Via Villarosa, 12 — Palermo (Italia)]*.

BOURLET (Carlo) [Strasbourg (Alsace): 25.4.1866] [26.2.1899] [269], docteur ès Sciences mathématiques; agrégé de l'Université; lauréat de l'Institut de France; membre de la Société Mathématique de France; collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées;* professeur de Mathématiques spéciales au Lycée St.-Louis; professeur de Mathématiques et de Mécanique à l'École des Beaux-Arts de Paris. *[Avenue de l'Observatoire, 22 — Paris, XIV^e^ (France)]*.

BOUTROUX (Pierre) [Paris (France): 6.12.1880] [11.12.1904] [340], docteur ès Sciences; collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées. [Rond-Point Bugeaud, 5 — Paris, XVI^e^ (France)]*.

BOZÁL Y OBEJERO (Angel) [Zaragoza (España): 27.10.1872] [27.12.1903] [326], Doctor en Ciencias Matemáticas; Doctor en Ciencias Fisicas; Licenciado en Ciencias Químicas; Catedrático Numerario, por oposición, de Matemáticas en el Instituto general y técnico de San Sebastián (España); Director de la *Gaceta de Matemáticas elementales. [Calle de Trafalgar, 36, 3°, izquierda — Madrid (España)]*.

BREGLIA (Ernesto) [Napoli (Italia): 4.1.1863] [5.2.1888] [97], ingegnere; dottore in Matematica; libero docente di Statica grafica ed assistente alla cattedra di Statica grafica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. *[Via Trinità degli Spagnoli, 31 — Napoli (Italia)]*.

BRILL (Alexander von) [Darmstadt (Hessen) (Deutschland): 20.9.1842] [11.12.1904] [339], Dr. phil. und nat.; korr. Mitglied der Physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen; korr. Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; korr. Mitglied der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Mathematik an der Kgl. Eberhard-Karls-Universität Tübingen. *[Eugenstr. 3 — Tübingen (Württemberg) (Deutschland)]*.

BRUSOTTI (Luigi) [Pavia (Italia): 11.9.1877] [25.12.1904] [344], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Pavia. *[Via Mantovani, 10 — Pavia (Italia)]*.

BURALI-FORTI (Cesare) [Arezzo (Italia): 13.8.1861] [10.3.1889] [143], dottore in Matematica; prof. nella R. Accademia Militare di Torino. *[R. Accademia Militare — Torino (Italia)]*.

BURGATTI (Pietro) [Cento (Ferrara) (Italia): 28.2.1868] [8.7.1894] [208], dottore in Matematica; libero docente di Calcolo infinitesimale e di Meccanica razionale, ed assistente alle cattedre di Algebra e Calcolo, nella R. Università di Roma; assistente nel R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica. *[Via Principe Amedeo, 66— Roma (Italia)]*.

CALAPSO (Pasquale) [Carini (Palermo) (Italia): 12.4.1872] [10.12.1899] [276], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria analitica e projettiva nella

R. Università di Palermo; inc. di Matematica nel R. Istituto Tecnico « Filippo Parlatore » di Palermo. *[Via Quintino Sella, 48 — Palermo (Italia)].*

* **CALDARERA** (Francesco) [Randazzo (Catania) (Italia): 5.5.1825] [2.3.1884] [7], ingegnere; socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio ordinario della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro della Société Mathématique de France; socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania), dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova e dell'Associazione « Mathesis » d'Italia; prof. ord. di Meccanica razionale nella R. Università di Palermo. *[Via Enrico Parisi, 4 — Palermo (Italia)].*

CAMINATI (Pietro) [Genova (Italia): 7.4.1837] [12.2.1905] [360], ingegnere-architetto; ex pensionato architetto dall'Accademia di Belle Arti di Genova; prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico e Nautico « Pietro Martini » di Cagliari. *[Via Barcellona, 29 — Cagliari (Italia)].*

CANTOR (Georg) [Sanct Petersburg (Russland): 19.2/3.3.1845] [26.3.1905] [386], Dr. phil.; Dr. math. (Christiania); Mitglied der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle); korrespondent Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; Ehrenmitglied der London Mathematical Society; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Mathematik an der Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg. *[Händelstr. 13 — Halle a. d. S. (Preussen) (Deutschland)].*

* **CAPELLI** (Alfredo) [Milano (Italia): 5.8.1855] [2.3.1884] [8], dott. in Matem.; socio ordinario residente della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio onorario della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; direttore del *Giornale di Matematiche;* prof. ord. di Algebra complementare ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Napoli. *[Corso Re d'Italia (Rettifilo), 248 — Napoli (Italia)].*

* **CAPITÒ** (Michele) [Palermo (Italia): 24.10.1835] [2.3.1884; 26.3.1905] [9], ing.; socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio della Società d'Igiene di Palermo; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; prof. ord. d'Idraulica teorico-pratica con la dottrina dei motori idraulici e dell'Idraulica agricola, inc. di Costruzioni fluviali e marittime, e Direttore, della R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Palermo. *[Via Quintino Sella, 2 — Palermo (Italia)].*

CARRONE (Claudio) [Popoli (Aquila) (Italia): 23.3.1874] [9.11.1902] [311], dottore in Matematica; prof. nella R. Scuola Tecnica di Siracusa. *[Via Maniàce, 101 — Siracusa (Italia)].*

CARSLAW (Horatio Scott) [Helensburgh (Scotland): 12.2.1870] [10.1.1897] [235], M. A. (Cambridge), M. A. (Glasgow), D. Sc. (Glasgow); Fellow of Emmanuel College, Cambridge; Member of the Edinburgh Mathematical Society; Member of the London Mathematical Society; Professor of Pure and Applied Mathematics in the University of Sydney. *[The University — Sydney (N.S.W.) (Australia)].*

CASSANI (Pietro) [Venezia (Italia): 4.6.1832] [14.8.1898] [257], dott. in Matem.; membro effettivo del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; socio degli Atenei di Venezia e Treviso; prof. di Matematiche nel R. Istituto Tecnico « Paolo Sarpi » di Venezia. *[S. Martino, Campo della Tana, 2160 — Venezia (Italia)].*

CASTELNUOVO (Guido) [Venezia (Italia): 14.8.1865] [13.1.1889] [138], dott. in Matem.; socio corr. della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio corr. della Reale Accademia delle Scienze di Torino; collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* prof. ord. di Geometria analitica e projettiva, e inc. di Matematiche superiori, nella R. Università di Roma. *[Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma (Italia)].*

CATTANEO (Paolo) [Padova (Italia): 20.4.1878] [14.4.1901] [292], dottore in Matematica. *[Via Solferino, 15 — Padova (Italia)].*

CERRUTI (Valentino) [Croce Mosso (Novara) (Italia): 14.2.1850] [5.12.1886] [48], enatore del Regno; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio azionale (e segretario per la Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali) della eale Accademia dei Lincei (Roma); membro della Kaiserliche Leopoldinisch-Caronische Deutsche Akademie der Naturforscher (Halle), della Société Mathématique e France e della Société des Sciences Mathématiques et Naturelles de Cherbourg; embro del Consiglio superiore di Pubblica Istruzione; membro del Consiglio Direttivo el Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Matematiche superiori nella R. Università di Roma; direttore della R. Scuola d'Applicazione er gl'Ingegneri in Roma. *[Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma (Italia)]*.

CERTO (Luigi) [Napoli (Italia): 19.12.1855] [14.10.1888] [135], dottore in Matematica; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; prof. nel R. Liceo «Terenzio Mamiani» di Roma. *[R. Liceo Terenzio Mamiani — Roma (Italia)]*.

CHINI (Mineo) [Massa (Massa Carrara) (Italia): 8.5.1866] [12.2.1905] [361], dott. in Matem.; libero docente, e inc. di Calcolo infinit., nella R. Università di Genova; prof. el R. Liceo «Andrea D'Oria» di Genova. *[Corso Torino, 21 — Genova (Italia)]*.

CIANI (Edgardo) [Rocca San Casciano (Firenze) (Italia): 7.10.1864] [10.7.1898] 255], dottore in Matematica; prof. inc. di Geometria projettiva nella R. Università di Genova. *[Via Bagnara, 11 — Quinto al Mare (Prov. di Genova) (Italia)]*.

CIPOLLA (Michele) [Palermo (Italia): 28.10.1880] [26.1.1902] [303], dottore in Matematica. *[Via Volturno, 48 — Palermo (Italia)]*.

COMPOSTO (Salvatore) [Patti (Messina) (Italia): 22.2.1876] [12.4.1903] [315], dottore in Matematica; prof. nella R. Scuola Tecnica di Castroreale. *[R. Scuola Tecnica — Castroreale (Prov. di Messina) (Italia)]*.

CONTI (Ignazio) [...] [8.2.1885] [30], dottore in Matematica; prof. nel R. Istituto Tecnico «Filippo Parlatore» di Palermo. *[R. Istituto Tecnico — Palermo (Italia)]*.

CORDONE (Gerolamo) [Genova (Italia): 3.11.1867] [28.4.1895] [220], dott. in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria descrittiva e disegno nella R. Scuola Navale Superiore di Genova. *[Via Cannato il Curto, 11, int. 5 — Genova (Italia)]*.

COSSERAT (Eugène) [Amiens (Somme) (France): 4.3.1866] [5.1.1896] [226], ancien élève de l'École Normale supérieure de Paris; agrégé de l'Université; docteur ès Sciences Mathématiques; associé ordinaire de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse; membre de la Société Mathématique de France, de la Société Mathématique de Kharkow et de la Société Mathématique de Moscou; professeur de Calcul différentiel et intégral à l'Université de Toulouse. *[Rue de Metz, 1 — Toulouse (Haute-Garonne) (France)]*.

COSSERAT (François) [Douai (Nord) (France): 26.10.1852] [23.1.1898] [244], ancien élève de l'École Polytechnique de Paris; membre de la Société Mathématique de France; ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. *[Avenue de l'Observatoire, 36 — Paris, XIVe (France)]*.

COSTA (Gregorio) [Napoli (Italia): 29.5.1856] [4.12.1887] [77], ing.; dott. in Fisica; socio corrispondente del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli; prof. di Fisica applicata nel R. Istituto Tecnico «Giovan Battista della Porta» di Napoli; prof. di Fisica sperimentale nel Collegio Militare di Napoli. *[Via Tribunali, 194 — Napoli (Italia)]*.

DALL'ACQUA (Francesco Aurelio) [Venezia (Italia): 19.9.1877] [12.2.1905] [362], dottore in Matematica; libero docente di Analisi infinitesimale, ed assistente di Geometria analitica e di Analisi algebrica ed infinitesimale, nella R. Università di Padova. *[S. Aponal, 1081 — Venezia (Italia)]*.

D'AMICO (Francesco) [Acireale (Catania) (Italia): 2.4.1880] [12.2.1905] [363], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Catania. *[Via Marzulli, 23 — Acireale (Prov. di Catania) (Italia)]*.

DANIELE (Ermenegildo) [Chivasso (Torino) (Italia): 13.10.1875] [13.11.1898] [258], dottore in Matematica; libero docente di Meccanica razionale e prof. interno di Matematica presso la Scuola Normale in Scienze della R. Università di Pavia. *[R. Università — Pavia (Italia)]*.

D'ARONE (Giovanni Domenico) [Palermo (Italia): 11.12.1859] [24.1.1886; 8.5.1904] [38], ing.; dottore in Matematica; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; assistente alla cattedra di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Palermo; reggente di Matematica nelle Scuole Tecniche, comandato per le matematiche nel R. Istituto Tecnico « Filippo Parlatore » di Palermo. *[R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri — Palermo (Italia)].*

DE DONDER (Théophile) [Schaerbeek (Brabant) (Belgique): 19.8.1872] [3.4.1901] [290], docteur en Sciences physiques et mathématiques. *[Rue Masui, 196 — Bruxelles (Belgique)].*

DE FRANCHIS (Michele) [Palermo (Italia): 6.4.1875] [13.1.1895] [215], dottore in Matematica; socio ordinario della Reale Accademia Peloritana di Messina; libero docente di Geometria analitica e projettiva nella R. Università di Messina; prof. nel R. Istituto Tecnico « Antonio Maria Iaci » di Messina. *[Viale S. Martino, 138^bis^— Messina (Italia)].*

DEL GIUDICE (Modestino) [Mercogliano (Avellino) (Italia): 13.2.1864] [15.1.1899] [262], dottore in Matematica; libero docente di Geometria analitica nella R. Università di Napoli; prof. di Matematiche nel R. Istituto Tecnico « Pietro Giannone » di Foggia. *[R. Istituto Tecnico — Foggia (Italia)].*

DELLA ROCCA DI CANDAL (Gino) [Napoli (Italia): 1.3.1848] [5.2.1888; 12.6.1904] [94], ing.; Regio Ispettore Superiore delle Ferrovie; membro del Comitato superiore delle Ferrovie; segretario generale della R. Commissione per l'ordinamento delle Ferrovie. *[Corso Vittorio Emanuele, 154 — Roma (Italia)].*

DEL PEZZO (Pasquale), duca di Cajanello [Berlino (Germania): 2.5.1859] [5.12.1886] [49], dott. in Diritto; dott. in Matematica; socio residente dell'Accademia Pontaniana; socio ordinario residente della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio corrispondente dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei (Roma); socio corrispondente del Reale Istituto d'incoraggiamento in Napoli; membro della Société Mathématique de France; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Napoli. *[Piazza S. Marcellino, 2 — Napoli (Italia)].*

DEL RE (Alfonso) [Calitri (Avellino) (Italia): 9.10.1859] [13.2.1887] [60], dottore in Matematica; consigliere comunale di Napoli; socio corrispondente nazionale della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio non residente della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena e della Società dei Naturalisti di Modena; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università di Napoli. *[Via Foria, 58 — Napoli (Italia)].*

DICKSTEIN (Samuel) [Varsovie (Pologne) (Russie): 12.5.1851] [28.6.1903] [321], ancien élève de l'École supérieure et de l'Université de Varsovie; membre correspondant de l'Académie des Sciences de Cracovie; associé étranger de la Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften (Prague); membre de la Société des Amis des Sciences de Posen, de la Société Mathématique de France, de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung, de la Société Mathématique de St.-Pétersbourg, de l'Institut International Bibliographique de Bruxelles, du Comité permanent des Congrès internationaux d'Actuaires, de la Société « Copernic » des Naturalistes Polonais à Léopol; rédacteur des *Prace Matematyczno-Fizyczne* et des *Wiadomosis matematyczne;* président de la Commission météorologique à Varsovie; membre du Conseil d'administration de la Société d'assurances sur la vie « Providentia »; ancien professeur de Mathématiques au Gymnase. *[Rue Marszalkowska, 117 — Varsovie (Pologne) (Russie)].*

DINI (Ulisse) [Pisa (Italia): 14.11.1845] [22.7.1900] [282], dott. in Matem.; senatore del Regno; membro della Giunta e del Consiglio superiore di Pubblica Istruzione; socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (Roma); accademico nazionale non residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; socio corrispondente della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano) e della Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; membro onorario della London Mathematical Society; dottore (honoris causa) in Matematica

dell'Università di Christiania; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; redattore degli *Annali di Matematica pura ed applicata;* direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa; prof. ord. di Analisi superiore ed inc. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Pisa. *[R. Scuola Normale Superiore—Pisa (Italia)].*

DI PIRRO (Giovanni) [...][10.3.1895][218], dottore in Matematica. *[Via Buonarroti, 39, int. 34 — Roma (Italia)].*

DI SIMONE (Guglielmo) [Palermo (Italia): 7.9.1862][25.1.1885][28], ingegnere; socio del Collegio degli Ingegneri e Architetti in Palermo; segretario del Circolo Matematico di Palermo. *[Via Principe Scordia, 11 — Palermo (Italia)].*

D'OVIDIO (Enrico) [Campobasso (Italia): 11.8.1843][4.12.1887][72], dott. in Matematica; senatore del Regno; presidente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano) e della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio emerito dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio onorario della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena; membro della Société Mathématique de France (Paris) e della Società Matematica di Praga; preside della Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, prof. ord. di algebra e Geometria analitica, ed inc. di Analisi superiore, nella R. Università di Torino. *[Corso Oporto, 30 — Torino (Italia)].*

DURÁN LORIGA (Juan J.) [La Coruña (España): 17.6.1854][26.1.1896][228]; miembro de la Société Mathématique de France; miembro de la Association Française pour l'Avancement des Sciences; miembro de la Sociedad Científica « Antonio Alzate » (México); Director de la Academia preparatoria para carreras Civiles y Militares; Comandante de Artilleria (al riposo); Ingeniero industrial. *[Plaza de Maria Pita, 20 — La Coruña (España)].*

EIESLAND (John) [Kristiansand (Norway): 27.1.1867][12.3.1905][384], B. Ph. (South Dakata State University); Ph. D. (Johns Hopkins University); Professor of Mathematics, Thiel College, Greenville, Pa. (1895-1903); Instructor in Mathematics, United States Naval Academy, Annapolis, Md. *[U. S. Naval Academy — Annapolis (Md.) (U. S. A.)].*

EMCH (Arnold) [Hessigkofen (Canton of Solothurn) (Switzerland): 24.3.1871][26.3.1905][390], M. Sc., Ph. D. (Kansas); Member of the American Mathematical Society; Member of the Society for the Promotion of Engineering Education; Editor of the *University of Colorado Studies;* formerly Professor of Mathematics in the Technicum of Biel, Switzerland; Professor of Graphics and Mathematics in the University of Colorado. *[University of Colorado — Boulder (Col.) (U. S. A.)].*

ENRIQUES (Federico) [Livorno (Italia): 5.1.1871][22.7.1894][209], dott. in Matematica; accademico onorario della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* prof. ord. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno nella R. Università di Bologna. *[Via d'Azeglio, 57 — Bologna (Italia)].*

FANO (Gino) [Mantova (Italia): 5.1.1871][8.1.1893][188], dottore in Matematica; socio effettivo della Reale Accademia Virgiliana di Mantova; corrispondente della Reale Accademia Peloritana di Messina; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* prof. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno nella R. Università di Torino. *[Piazza Castello, 18 — Torino (Italia)].*

FAZZARI (Gaetano) [Tropea (Catanzaro) (Italia): 6.10.1856][15.1.1899][260], dottore in Matematica; direttore del *Pitagora;* prof. nel R. Liceo Umberto I° di Palermo. *[Vicolo Chiuso al Corso Olivuzza, 10 — Palermo (Italia)].*

FEHR (Henri) [Zurich (Suisse): 2.2.1870][12.2.1905][364], docteur ès Sciences mathématiques; membre de l'Institut National Genevois (section des Sciences naturelles et mathématiques); membre de la Société Mathématique de France; membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; directeur de *L'Enseignement Mathématique;* professeur ord. d'Algèbre et de Géométrie supérieures à l'Université de Genève. *[Rue Ph. Plantamour, 19 — Genève (Suisse)].*

FERRARI (Alessandro) [Lucera (Foggia) (Italia): 5.11.1882] [12.2.1905] [365], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Torino. *[Via Accademia Albertina, 1 — Torino (Italia)].*

FINKEL (Benjamin Franklin) [...] [26.3.1905] [392], M. A., M. Sc.; Member of the London Mathematical Society; Member of the American Mathematical Society; Editor of the *American Mathematical Monthly;* Professor of Mathematics and Physics in Drury College, Springfield. *[Drury College — Springfield (Mo.) (U. S. A.)].*

FORSYTH (Andrew Russell) [Glasgow (Scotland): 18.6.1858] [26.2.1905] [378], Sc. D. (Cambridge, Dublin, Victoria, Oxford); LL. D. (Glasgow); Math. D. (Christiania); Fellow of the Royal Society of London; Honorary Fellow of the Royal Society of Edinburgh; Fellow of the Royal Astronomical Society (London); Fellow of the Cambridge Philosophical Society; Honorary Member of the Manchester Literary and Philosophical Society; Corresponding Member of the Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); Member of the American Mathematical Society; President of the London Mathematical Society; President of Section of the British Association 1897, 1905; Royal Medallist of the Royal Society, 1897; formerly Professor of Mathematics at University College, Liverpool; formerly Lecturer and Assistant Tutor of Trinity College, Cambridge, and formerly University Lecturer in Mathematics; Fellow of Trinity College, Cambridge; Sadlerian Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge. *[Trinity College — Cambridge (England)].*

FOUËT (L'Abbé Édouard André) [Lorient (Morbihan) (France): 2.7.1854] [27.11.1904] [338]; membre de la Société Mathématique de France; professeur de Mathématiques supérieures à l'Institut Catholique de Paris. *[Rue Férou, 11 — Paris, VI^e (France)].*

FOURET (Georges) [Paris (France): 29.1.1845] [4.12.1887] [78], ancien élève de l'École Polytechnique de Paris; ancien capitaine du Génie; membre de la Société Philomathique de Paris; membre et ancien président de la Société Mathématique de France; membre du Conseil de la Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale; membre du Comité consultatif des Assurances contre les accidents du travail; membre de la Société des Ingénieurs civiles de France et de l'Institut des Actuaires Français; membre de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences; membre de la « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; examinateur d'admission et répétiteur à l'École Polytechnique de Paris. *[Avenue Carnot, 4 — Paris, XVII^e (France)].*

FUBINI (Guido) [Venezia (Italia): 19.1.1879] [12.4.1903] [316], dottore in Matematica; inc. di Analisi superiore nella R. Università di Catania. *[Piazza Manganelli, 14, 3° p° — Catania (Italia)].*

GALDEANO (Don Zoel Garcia de) [Pamplona (Navarra) (España): 5.7.1846] [24.5.1891] [177], Doctor en Ciencias matemáticas; socio correspondiente de la Real Académia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid; socio correspondiente de la Academia Real das Sciencias de Lisboa; miembro de la Société Mathématique de France; miembro de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; miembro de la « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; Catedrático de Cálculo diferencial é integral de la Universidad de Zaragoza. *[Calle del Coso, 99 — Zaragoza (España)].*

GARIBALDI (Cesare) [Genova (Italia): 27.5.1865] [8.1.1893] [186], ingegnere; dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Genova. *[Via Balbi, 38 — Genova (Italia)].*

* **GEBBIA** (Michele) [Palermo (Italia): 7.2.1854] [2.3.1884] [13], ing.; membro della Société Mathématique de France; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; vice presidente, e membro del Consiglio Direttivo, del Circolo Matematico di Palermo; libero docente di Meccanica razionale nella R. Università di Palermo; inc. di Statica grafica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Palermo. *[Piazza Bologni, 23 — Palermo (Italia)].*

† **GERRANS** (Henry Tresawna) [Plymouth (England): 23.8.1858] [8.2.1903] [313], M. A. (Oxford); Member of the London Mathematical Society; Member of the Edinburgh Mathematical Society; Member of the American Mathematical Society; Mem-

ber of the Société Mathématique de France; Fellow and Tutor of Worcester College, Oxford; Secretary to the Delegacy of Local Examinations. *[St. John Street 20 — Oxford (England)]*.

GIAMPAGLIA (Niccolò) [Aci Castello (Catania) (Italia): 28.4.1876] [8.1.1905] [349], dottore in Matematica; assistente onorario alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Catania. *[Via Giuseppe Verdi, 40bis — Catania (Italia)]*.

GIGLI (Duilio) [Sansepolcro (Arezzo) (Italia): 8.1.1878] [22.6.1902] [310], dottore in Matematica; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; prof. nel R. Liceo di Sassari. *[Piazza d'Italia, 6, p° 2° — Sassari (Italia)]*.

GIORGI (Giovanni) [Lucca (Italia): 27.11.1871] [26.4.1903] [317], ingegnere; M. I. E. E.; presidente della sezione di Roma dell'Associazione Elettrotecnica Italiana. *[Via Farini, 5 — Roma (Italia)]*.

GIUDICE (Francesco) [Codevilla (Pavia) (Italia): 1.3.1855] [24.1.1886] [37], ingegnere; dottore in Matematica; libero docente di Algebra complementare nella R. Università di Genova; prof. nel R. Istituto Tecnico « Vittorio Emanuele II » di Genova. *[R. Istituto Tecnico — Genova (Italia)]*.

GIULOTTO (Virgilio) [Mantova (Italia): 5.5.1877] [9.11.1902] [312], dott. in Matem.; prof. nel R. Ginnasio di Gubbio. *[R. Ginnasio — Gubbio (Prov. di Perugia) (Italia)]*.

GORDAN (Paul) [Breslau (Preussen) (Deutschland): 27.4.1837] [22.1.1905] [352], Geh. Hof-Rat; Dr. phil; Hon. D. Sc. (Dublin); korr. Mitglied der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin); ord. Mitglied der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen; korr. Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; korr. Mitglied der Société Royale des Sciences de Liège; Ehrenmitglied der London Mathematical Society; korr. Mitglied des Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); wirkl. Mitglied der Société Mathématique de Moscou; korr. Mitglied der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München); korr. Mitglied des Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie) (Paris); ausw. Mitglied der Reale Accademia dei Lincei (Roma); Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; etc.; Mithrsg. der *Mathematischen Annalen*; Ehrenmitglied der Universität Dorpat; ord. Professor der Mathematik an der Kgl. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen. *[Goethestr. 5 — Erlangen (Bayern) (Deutschland)]*.

GRIMALDI (Giovan Pietro) [Modica (Siracusa) (Italia): 28.10.1860] [8.1.1888] [92], dottore in Fisica; socio effettivo, e segretario, dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania); prof. ord. di Fisica sperimentale, ed inc. di un corso di Fisica per i medici ed i farmacisti, nella R. Università di Catania. *[Via Androne, 25 — Catania (Italia)]*.

GUARESCHI (Giacinto) [Torino (Italia): 2.10.1882] [12.2.1905] [366], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Torino. *[Corso Valentino, 11 — Torino (Italia)]*.

* † **GUCCIA** (Nob. Giovanni Battista) dei Marchesi di Ganzaria [Palermo (Italia): 21.10.1855] [2.3.1884] [15], dott. in Matem. (Roma); fondatore del Circolo Matematico di Palermo; socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; membro della Société Mathématique de France, dell'Association Française pour l'Avancement des Sciences e della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; corrispondente della Société Philomathique de Paris, della Société Royale des Sciences de Liège e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro della Società Siciliana per la Storia Patria (Palermo); membro della « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; direttore dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Palermo. *[Via Ruggiero Settimo, 30 — Palermo (Italia)]*.

GUERRA (Ester Paolo) [Palermo (Italia): 16.1.1871] [15.1.1899] [261], ingegnere; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; segretario del Circolo Matematico di Palermo; insegnante di Matematica nella Scuola Normale dell'Educatorio Whitaker. *[Via Macqueda, 92 — Palermo (Italia)]*.

GULDBERG (Alf) [Christiania (Norvège): 17.3.1866] [11.12.1904] [343], docteur ès

Sciences; membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; professeur à l'Académie militaire de Christiania; maître de conférences à l'Université de Christiania. *[Thomas Heftyesgd. 37 — Christiania (Norvège)].*

GYLDÉN (Hans Olof Frederik) [Jena (Sachsen-Weimar) (Deutschland): 7.11.1867] [12.3.1899] [270], capitaine dans la Marine Royale Suédoise; professeur d'Astronomie à l'École Navale de Stockholm. *[Sibyllegatan 40 — Stockholm (Suède)].*

† **HALSTED** (George Bruce) [Newark (New Jersey) (U. S. A.): 25.11.1853] [13.5.1894] [205], A. M. (Princeton College); Ph. D. (Johns Hopkins University); Member of the American Mathematical Society; Member of the London Mathematical Society; Member of the Société Mathématique de France; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Member of the Sociedad Científica «Antonio Alzate» (Mexico); Member of the Sociedad de Geografia y Estadística (Mexico); Member of the Society of Arts; Member of the Washington Academy of Sciences; Member of the Mathematical Association; Member of the Society for the Promotion of the Engineering Education; Fellow of the American Association for the Advancement of Science; President of the Texas Academy of Science; ex-Fellow of Princeton College; twice Fellow of Johns Hopkins University; Intercollegiate Prizeman; sometime Instructor in Post Graduate Mathematics, Princeton College; Professor of Mathematics in Kenyon College. *[Terrace Place — Gambier (Ohio) (U. S. A)].*

HASKELL (Mellen Woodman) [Salem (Massachusetts) (U. S. A.): 17.3.1863] [26.3.1905] [391], A. B., A. M., Ph. D. (Göttingen); Member of the American Mathematical Society; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Associate Professor of Mathematics in the University of California. *[P. O. Box 3 — Berkeley (Cal.) (U. S. A.)].*

HERMANN (Arthur Joseph) [Paris (France): 31.8.1839] [11.12.1904] [341], ancien élève de l'École Normale supérieure de Paris; membre de la Société Mathématique de France; libraire-éditeur de S. M. le Roi de Suède et de Norvège. *[Rue de la Sorbonne, 6 — Paris, V^e^ (France)].*

† **HUMBERT** (Georges) [Paris (France): 7.1.1859] [4.12.1887] [79], ancien élève de l'École Polytechnique de Paris; ingénieur des Mines; docteur ès Sciences mathématiques; membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); membre de la Société Philomathique de Paris; membre et ancien président de la Société Mathématique de France; membre de la «Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*»; professeur d'Analyse à l'École Polytechnique de Paris. *[Rue Daubigny, 6 — Paris, XVII^e^ (France)].*

INSOLERA (Filadelfo) [Lentini (Siracusa) (Italia): 29.2.1880] [24.5.1903] [319], dottore in Matematica. *[Cassa Nazionale di Previdenza per la invalidità e la vecchiaja degli operai — Roma (Italia)].*

JADANZA (Nicodemo) [Campolattaro (Benevento) (Italia): 14.10.1847] [9.9.1888] [133], dottore in Matematica; accademico residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Dafnica di Lettere, Scienze ed Arti Belle di Acireale e della Associacão dos Engenheiros civis Portuguezes (Lisbona); prof. ord. di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino; prof. straord. di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino. *[R. Università — Torino (Italia)].*

† **JORDAN** (Camille) [Lyon (Rhône) (France): 5.1.1838] [9.6.1889] [148], membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); membre de la Société Philomathique de Paris; membre et ancien président de la Société Mathématique de France; membre de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences; associé étranger de la Reale Accademia dei Lincei (Rome); membre correspondant de l'Académie des Sciences, des Belles-Lettres et des Arts de Lyon, de la Reale Accademia delle Scienze di Torino, du Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milan), de l'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei (Rome), de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (Bruxelles), de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, de la Physikalisch-medizinische Sozietät in Erlangen, de la Cambridge Philosophical Society; membre honoraire de la Société des Sciences d'Athènes; docteur (honoris causa) en Mathématique de l'Université de

Christiania; ancien ingénieur en chef des Mines (actuellement en retraite); directeur du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; professeur de Mathématiques au Collège de France; professeur d'Analyse à l'École Polytechnique de Paris. *[Rue de Varenne, 48 — Paris, VII^e (France)].*

JUNG (Giuseppe) [Milano (Italia): 16.3.1845] [5.6.1887] [65], dott. in Matem.; membro effettivo del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); membro della Société Mathématique de France; membro onorario della British Association for the Advancement of Science; redattore degli *Annali di Matematica pura ed applicata;* collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* prof. ord. di Statica grafica e Geometria projettiva nel R. Istituto Tecnico superiore di Milano. *[Bastioni di Porta Vittoria, 31 — Milano (Italia)].*

KERBEDZ (M.me Eugénie de) [...] [24.1.1892] [180]. *[Kouznietschnoi, 14—St.-Pétersbourg (Russie)].*

KLEIN (Felix) [Düsseldorf (Preussen) (Deutschland): 25.4.1849] [22.1.1905] [353], Geh. Reg.-Rat.; Dr. phil.; Hon. Sc. D. (Cambridge); LL. D. (Princeton); De Morgan Medallist (1893); Dr. math. (Christiania); Ehrenmitglied der Wiskundig Genootschap (Amsterdam); korr. Mitglied der Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; ausw. Mitglied der Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (Bruxelles); Ehrenmitglied der Cambridge Philosophical Society; Ehrenmitglied der Royal Irish Academy (Dublin); Ehrenmitglied der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen; ord. Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; Mitglied der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; ausw. Mitglied der Royal Society of London; Ehrenmitglied der London Mathematical Society; Ehrenmitglied der Manchester Literary and Philosophical Society; korr. Mitglied des Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); wirkl. Mitglied der Société Mathématique de Moscou; Ehrenmitglied der New York Academy of Sciences; korr. Mitglied des Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie) (Paris); ausw. Mitglied der Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (Roma); ausw. Mitglied der Reale Accademia dei Lincei (Roma); ausw. Mitglied der Reale Accademia delle Scienze di Torino; ausw. Mitglied der Kongl. Vetenskaps-Societeten (Societas Regia Scientiarum Upsaliensis); korr. Mitglied des Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia); Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; etc.; Herausgeber der *Mathematischen Annalen;* Mithrsg. der *Zeitschrift fur Mathematik und Physik;* Mitglied der Kommission für die *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* ord. Professor der Mathematik an der Georg-Augusts-Universität Göttingen. *[Wilhelm Weber-Str. 3 — Göttingen (Preussen) (Deutschland)].*

KÖNIG (Jules) [Györ (Hongrie): 16.12.1849] [12.2.1905] [367], conseiller au Ministère; secrétaire perpétuel de la section des Sciences mathématiques et naturelles de la Magyar Tudományos Akadémia (Budapest); membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; redacteur des *Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn;* professeur à l'École Polytechnique de Budapest. *[Vámház körút 5 — Budapest (Hongrie)].*

KOENIGSBERGER (Leo) [Posen (Preussen) (Deutschland): 15.10.1837] [12.2.1905] [368], Geh.-Rat; Dr. phil.; korr. Mitglied der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin); korr. Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; etc.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Mathematik an der Grossherz. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. *[Kaiserstr. 2 a— Heidelberg (Baden) (Deutschland)].*

KOHN (Gustav) [Reichenau (Böhmen) (Oesterreich): 22.5.1859] [26.2.1905] [379], Dr. phil.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Mitarbeiter an der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* ausserord. Professor an der K. K. Universität Wien. *[Reisnerstr. 34 — Wien III/$_2$ (Oesterreich)].*

KRAZER (Adolf) [Zusmarshausen (Bayern) (Deutschland): 15.4.1858] [22.1.1905] [354], Dr. phil.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Mitarbeiter an der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* ord. Professor der höheren Mathematik an der Grossherzogl. Technischen Hochschule zu Karlsruhe. *[Westendstr. 57—Karlsruhe (Baden) (Deutschland)].*

LAISANT (Charles-Ange) [Basse-Indre (Loire-Inférieure) (France): 1.11.1841] [24.5.1891] [176], ancien élève de l'École Polytechnique de Paris; docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Société Philomathique de Paris; membre et ancien président de la Société Mathématique de France; président de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences (1903-1904); membre honoraire de la Société Physico-Mathématique de Kasan; membre correspondant de la Société Royale des Sciences de Liège, de l'Academia Real das Sciencias de Lisboa, de la Real Académia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales de Madrid, de l'Instituto de Coimbra, de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, de la Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, de l'Institut National de Genève; secrétaire de la «Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques*»; directeur des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et de l'*Enseignement Mathématique*; collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*; examinateur d'admission et répétiteur à l'École Polytechnique de Paris. *[Avenue Victor-Hugo, 162 — Paris, XVI^e (France)].*

LA MANNA (Antonino) [Palermo (Italia): 27.2.1851] [13.6.1886; 12.2.1905] [44], ingegnere; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; assistente alla cattedra di Meccanica applicata alle Costruzioni nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Palermo. *[Via Casa Professa, 22 — Palermo (Italia)].*

LA MENSA (Giovanni) [Palermo (Italia): 13.1.1847] [16.1.1887] [55], ing.; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; vice segretario del Circolo Matematico di Palermo; prof. di Costruzioni, Disegno relativo e Geometria descrittiva nel R. Istituto Tecnico di Palermo. *[Via Rosolino Pilo, 14 — Palermo (Italia)].*

LANZA DI MAZZARINO (Conte Giuseppe) [Palermo (Italia): 6.3.1866] [22.6.1890] [165], membro della Società Siciliana per la Storia Patria (Palermo); Presidente del Circolo di Cultura e dell'Associazione pel Bene Economico di Palermo. *[Via Macqueda, 389 (Palazzo Mazzarino) — Palermo (Italia)].*

LAURA (Ernesto) [Porto Maurizio (Italia): 23.3.1879] [12.2.1905] [369], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Meccanica razionale nella R. Università di Torino. *[Via Gaudenzio Ferrari, 4 — Torino (Italia)].*

LAURICELLA (Giuseppe) [Girgenti (Italia): 15.12.1867] [26.2.1893] [190], dottore in Matematica; socio effettivo dell'Accademia Gioenia di Catania; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Catania. *[Via Reitano, 10 — Catania (Italia)].*

LEBON (Désiré-Ernest) [Audigny (Aisne) (France): 25.8.1846] [24.3.1889; 25.2.1900] [145], agrégé de l'Université; lauréat de l'Académie Française; membre de la Société Astronomique de France; membre de la Royal Astronomical Society of London; membre de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences; membre de l'Alliance Française pour la Propagation de la Langue Française dans les colonies et à l'étranger; membre de la Société des Amis de l'Université de Paris; ancien professeur suppléant de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris; professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne à Paris; correcteur pour l'admission à l'École Militaire; examinateur pour le Baccalauréat moderne à la Sorbonne; examinateur à l'Institut Commercial de Paris. *[Rue des Écoles, 4^bis — Paris, V^e (France)].*

LEVI (Beppo) [Torino (Italia): 14.5.1875] [8.5.1898] [252], dottore in Matematica; prof. nel R. Istituto Tecnico «Gian Domenico Romagnosi» di Piacenza. *[Via Pastrengo, 12 — Torino (Italia)].*

LEVI-CIVITA (Tullio) [Padova (Italia): 29.3.1873] [24.2.1895] [217], dott. in Matem.; socio corrispondente della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia), dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo; membro della Società Fisica Italiana, della Société Mathématique de France, della Deutsche Mathematiker-Vereinigung e della American Mathematical Society; prof. di Meccanica razionale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Padova. *[Via Altinate, 14 — Padova (Italia)].*

LICATA DI BAUCINA (Nob. Giovanni Battista) Conte d'Isnello [Palermo (Italia): 8.12.1867] [12.6.1904] [331]. *[Piazza della Kalsa, 56 (Palazzo Baucina)—Palermo (Italia)].*

LO MONACO APRILE (Luigi) [Palermo (Italia): 4.4.1875] [27.12.1896] [230], dot-

tore in Matematica; prof. nel R. Liceo-Ginnasio «Gioberti» e nel R. Liceo «D'Azeglio» di Torino. *[Corso S. Maurizio, 17 — Torino (Italia)].*

LORIA (Gino) [Mantova (Italia): 19.5.1862] [4.12.1887] [80], dott. in Matem.; socio corrispondente della Reale Accademia Virgiliana di Scienze, Lettere ed Arti di Mantova, della Sociedad Científica «Antonio Alzate» (Mexico), della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, della Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften (Praga); membro dell'Association for the Improvement of Geometrical Teaching; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; direttore del *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche;* preside della Facoltà di Scienze, professore ord. di Geometria superiore, ed inc. di Geometria descrittiva, nella R. Università di Genova. *[Passo Caffaro, 1 — Genova (Italia)].*

LOVETT (Edgar Odell) [...] [15.1.1899] [263], M.A.; Ph.D. (Virginia, Leipzig); Member of the American Mathematical Society; Member of the Société Mathématique de France; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Professor of Mathematics, Princeton University. *[Princeton University — Princeton (N. J.) (U. S. A.)].*

LÜROTH (Jakob) [Mannheim (Baden) (Deutschland): 18.2.1844] [26.3.1905] [388], Geh. Hof-Rat; Dr. phil.; korr. Mitglied der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Mathematik an der Grossherz. Badischen Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br. *[Mozartstr. 10 — Freiburg i. Br. (Baden) (Deutschland)].*

LUGARO (Enrico) [Palermo (Italia): 2.12.1876] [21.1.1900] [278], dottore in Matematica; prof. nel R. Ginnasio di Castellammare del Golfo. *[R. Ginnasio — Castellammare del Golfo (Prov. di Trapani) (Italia)].*

MACALUSO (Damiano) [Palermo (Italia): 27.4.1845] [18.4.1886] [43], ing.; socio attivo, e direttore della classe di Scienze naturali ed esatte, della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio ord. della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania); socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); membro della Società degli Spettroscopisti Italiani; prof. ord. di Fisica sperimentale, ed inc. di un corso di Fisica per gli studenti di Medicina e Farmacia, nella R. Università di Palermo. *[R. Università — Palermo (Italia)].*

MACFARLANE (Alexander) [Blairgowrie (Perthshire) (Scotland): 21.4.1851] [23.12.1894] [211], M. A.; D. Sc. (Edinburgh); LL. D.; Fellow of the Royal Society of Edinburgh; Member of the American Mathematical Society; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Member of the Sociedad Científica «Antonio Alzate» (Mexico); General Secretary of the International Association for the Promotion of the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics; Professor of Mathematical Physics, Lehigh University, South Bethlehem, Pa. *[Gowrie Grove — Chatham (Ontario) (Canada)].*

MACRÌ (Vincenzo) [...] [23.3.1890] [159], ingegnere. *[Casteltermini (Prov. di Girgenti) (Italia)].*

MAGGI (Gian Antonio) [Milano (Italia): 19.2.1856] [11.12.1904] [342], dott. in Fisica; dottore in Matematica; socio ordinario della Società Fisico-Matematica dell'Università Imperiale di Kasan; socio corrispondente dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania), della Reale Accademia Peloritana di Messina, del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano), della Reale Accademia dei Lincei (Roma); prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica Matematica nella R. Università di Pisa. *[R. Università — Pisa (Italia)].*

MANCINI (Ernesto) [...] [14.1.1894] [196], ingegnere. *[Via Lungara, 10 — Roma (Italia)].*

MANGE (François-Louis) [Paris (France): 2.3.1856] [22.1.1905] [355], ancien élève de l'École Polytechnique de Zurich; ingénieur. *[Rue de Lisbonne, 47 — Paris, VIII^{e} (France)].*

MARCOLONGO (Roberto) [Roma (Italia): 23.8.1862] [13.5.1888] [116], dottore in Matematica; socio ordinario della Reale Accademia Peloritana di Messina; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Fisica matematica nella R. Università di Messina. *[R. Università — Messina (Italia)].*

MARLETTA (Giuseppe) [Catania (Italia): 10.10.1878] [22.12.1901] [301], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva, ed assistente onorario alla cattedra di Calcolo infinitesimale, nella R. Università di Catania. *[Via Motta, 5 — Catania (Italia)].*

MARTIN (Artemas) [Steuben Co. (New York) (U. S. A.): 3.8.1835] [14.11.1897] [242], M. A.; Ph. D.; LL. D.; Member of the London Mathematical Society; Member of the Société Mathématique de France; Member of the Edinburgh Mathematical Society; Member of the Mathematical Association, England; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Member of the American Mathematical Society; Member of the Philosophical Society of Washington; Fellow of the American Association for the Advancement of Science; Editor and Publisher of the *Mathematical Visitor;* Editor and Publisher of the *Mathematical Magazine. [915 N Street, N.W.— Washington (D.C.) (U.S.A)].*

MARTINETTI (Vittorio) [Mantova (Italia): 11.8.1859] [24.1.1886] [36], dottore in Matem.; socio ordinario della Reale Accademia Peloritana di Messina; corrispondente della Reale Accademia Virgiliana di Mantova e dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania; rettore della R. Università di Messina; prof. ord. di Geometria projettiva e descrittiva con disegno, ed inc. di Geometria superiore, nella R. Università di Messina. *[R. Università — Messina (Italia)].*

MASONI (Udalrigo) [Napoli (Italia): 11.7.1860] [13.2.1887] [59], dott. in Matem.; ingegnere; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio ordinario residente del Reale Istituto d'Incoraggiamento di Napoli; socio corrispondente nazionale della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; Presidente della Giunta di Vigilanza degl'Istituti Tecnico e Nautico; già Presidente del Consiglio dell'Ordine e del Collegio degl'Ingegneri ed Architetti di Napoli; libero docente di Meccanica razionale nella R. Università di Napoli; prof. ord. di Idraulica teoretica e pratica, e direttore del relativo Gabinetto, nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Napoli. *[Via Medina, 63 — Napoli (Italia)].*

MASSARINI (Sig.na Iginia) [...] [24.11.1895] [223], dottoressa in Matematica; tit. di Matematica nella R. Scuola Tecnica Femminile « Marianna Dionigi » di Roma; inc. di Matematica nel R. Ginnasio Femminile « Regina Elena » di Roma. *[Via Nazionale, 158 — Roma (Italia)].*

MEDOLAGHI (Paolo) [Firenze (Italia): 24.11.1873] [27.3.1898] [250], dott. in Matem.; libero docente di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Roma; vice-direttore della Cassa Nazionale di previdenza per la vecchiaja e per la invalidità degli operai. *[Via Manin, 69 — Roma (Italia)].*

MENABREA (Conte Carlo) Marchese di Val-Dora [Torino (Italia): 4.2.1853] [12.6.1904] [334], già allievo della Scuola Politecnica di Zurigo. *[Rue d'Angleterre, 19— Tunis (Tunisie)].*

MENDIZÁBAL TAMBORREL (Joaquin de) [Puebla (Mexico): 29.3.1856] [11.1.1891] [169], Ingeniero Géografo y Militar; Miembro honorario de la Sociedad Científica « Antonio Alzate » de Mexico; Socio de número de la Sociedad Mexicana de Geografia y Estadistica; Miembro de la London Mathematical Society, de la Edinburgh Mathematical Society, de la Société Mathématique de France, de la Société Mathématique de Moscou, de la American Mathematical Society; Miembro de las Sociedades Astronómicas de Alemania y Francia; Miembro de las Sociedades de Geografia de Berlin, Bruxelles, Madrid, Mexico y Paris; Miembro correspondiente de la Reale Accademia delle Scienze di Padova; Miembro de la Société Scientifique de Bruxelles; Miembro de la Associación de Ingenieros de Mexico; Miembro de la Sociedad Mexicana de Historia Natural. *[Sociedad Alzate. Palma, 13 — Mexico (Mexico)].*

MIGNOSI (Gaspare) [Palermo (Italia): 6.1.1875] [26.1.1902] [304], dottore in Matematica; assistente volontario alla cattedra di Algebra complementare nella R. Università di Palermo. *[Via Bandiera, 57 — Palermo (Italia)].*

MINEO (Corradino) [Palermo (Italia): 26.7.1875] [12.1.1902] [302], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geodesia nella R. Università di Palermo. *[R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri — Palermo (Italia)].*

MITTAG-LEFFLER (Gösta) [Stockholm (Suède): 16.3.1846] [13.5.1888] [114], Dr. phil. (Upsala); docteur (honoris causa) en Mathématique de l'Université de Bologne

et de l'Université de Christiania; docteur honoraire « of Civil Laws » de l'Université de Oxford; docteur honoraire en Sciences de l'Université de Cambridge; associé étranger, membre honoraire, membre, ou correspondant, des Académies et Sociétés suivantes: Wiskundig Genootschap (Amsterdam), Société Parnassos d'Athènes, Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (Bruxelles), Magyar Tudományos Akadémia (Budapest), Cambridge Philosophical Society, Videnskabs Selskabet (Christiania), Kongl. Danske Videnskabernes Selskab (Copenhague), Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher (Halle), Finska Vetenskaps-Societeten (Helsingfors), Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Société Royale des Sciences de Liège, Royal Society of London, British Association for the Advancement of Science, London Mathematical Society, Manchester Literary and Philosophical Society, Société Mathématique de Moscou, Società Reale (Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche) di Napoli, Accademia Pontaniana di Napoli, Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie) (Paris), Société Mathématique de France (Paris), Reale Accademia dei Lincei (Rome), Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien (Stockholm), Reale Accademia delle Scienze di Torino, Kongl. Vetenskaps-Societeten (Societas Regia Scientiarum Upsaliensis); membre du Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; rédacteur en chef des *Acta Mathematica;* professeur d'Analyse supérieure à l'Université de Stockholm. *[Stockholm-Djursholm (Suède)]*.

MONROY (Nob. Antonio) [Palermo (Italia): 17.3.1876] [12.6.1904] [333], ingegnere civile; straord. all'Ufficio Tecnico Provinciale di Palermo. *[Piazza Ranchibile, Villa Ranchibile — Palermo (Italia)]*.

MONTESANO (Domenico) [Potenza (Italia): 22.12.1863] [13.5.1888] [117], dott. in Matem.; socio corrispondente nazionale della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; prof. ord. di Geometria projettiva con disegno, e libero docente di Geometria superiore, nella R. Università di Napoli. *[Via Duomo, 45 — Napoli (Italia)]*.

MONTESSUS DE BALLORE (Vicomte Robert de) [Lyon (Rhône) (France): 20.5.1870] [13.1.1901] [284], licencié ès Sciences mathématiques; membre de la Société Mathématique de France; membre de la Société Scientifique de Bruxelles; membre de la Société Belge d'Astronomie; professeur de Mécanique rationnelle et chargé des cours d'Algèbre et Géométrie supérieures à la Faculté libre des Sciences de Lille. *[Boulevard de la Liberté, 121 — Lille (Nord) (France)]*.

MOORE (Eliakim Hastings) [Marietta (Ohio) (U. S. A.): 26.1.1862] [27.1.1889] [139], B. A.; Ph D. (Yale, Göttingen, honorary); LL. D.; Member of the National Academy of Sciences (Washington); Member and ex-President of the American Mathematical Society; Member of the London Mathematical Society; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Editor of the *Transactions of the American Mathematical Society;* Professor and Head of the Department of Mathematics, University of Chicago. *[Washington Avenue, 5617 — Chicago (Ill.) (U. S. A.)]*.

MORERA (Giacinto) [Novara (Italia): 18.7.1856] [4.12.1887] [82], dott. in Matem.; accademico residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); prof. onorario della R. Università di Genova; prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Torino. *[Via della Rocca, 22 — Torino (Italia)]*.

MUKHOPÂDHYÂY (Asutosh) [...] [8.6.1890] [163], M. A.; LL. D.; Vice-President of the Asiatic Society of Bengal (Calcutta); Member of the Royal Irish Academy (Dublin); Fellow of the Royal Society of Edinburgh; Member of the Edinburgh Mathematical Society; Fellow of the Royal Astronomical Society (London); Member of the London Mathematical Society; Member of the Physical Society (London); Member of the American Mathematical Society (New York); Member of the Société Mathématique de France (Paris); Member of the Société Française de Physique (Paris); Premchand Roychand Student in Mathematics and Physics, Examiner in Mathematics and Member of the Syndicate of the University of Calcutta; Professor of Mathematics at the Indian Association for the Cultivation of Science. *[77, Russa Road North, Bhowanipore — Calcutta (India)]*.

NEWSON (Henry Byron) [Mount Gilead (Ohio) (U. S. A.): 10.7.1860] [25.8.1901] [299], M. A.; Ph. D.; Member of the American Mathematical Society; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Editor of the *Kansas University Science Bulletin;* Professor of Mathematics in the University of Kansas. *[University of Kansas — Lawrence (Kan.) (U. S. A.)].*

NIELSEN (Niels) [Œrslev (Fyen) (Danmark): 2.12.1865] [22.1.1905] [356], docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Société Mathématique de France; membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; inspecteur général de l'enseignement mathématique aux Gymnases Danois; docent de Mathématiques pures à l'Université de Copenhague. *[Nörrebrogade 57 — Köbenhavn, N. (Danmark)].*

NOBILE (Vittorio) [Napoli (Italia): 27.10.1875] [10.2.1901] [286], dott. in Matem.; 1° astronomo aggiunto nel R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte; assistente alla cattedra di Geometria descrittiva nella R. Università di Napoli. *[R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte — Napoli (Italia)].*

NOETHER (Max) [Mannheim (Baden) (Deutschland): 24.9.1844] [28.8.1904] [336], Dr. phil.; korr. Mitglied der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin); korr. Mitglied der Magyar Tudományos Akadémia (Budapest); ord. Mitglied der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen; korr. Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; korr. Mitglied des Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); korr. Mitglied der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München); korr. Mitglied des Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie) (Paris); ausw. Mitglied der Reale Accademia dei Lincei (Roma); korr. Mitglied der Reale Accademia delle Scienze di Torino; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und Astronomischen Gesellschaft; Mitglied der « Internationalen Kommission für die GUCCIA-MEDAILLE (1908) »; Mithrsg. der *Mathematischen Annalen;* ord. Professor der Mathematik an der Kgl. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen. *[Nürnbergerstr. 32 — Erlangen (Bayern) (Deutschland)].*

ORLANDO (Luciano) [Caronia (Messina) (Italia): 13.5.1877] [12.7.1903] [323], dottore in Matematica; tenente del Genio. *[R. Scuola Normale Superiore — Pisa (Italia)].*

OSGOOD (William Fogg) [Boston (Mass.) (U. S. A.): 10.3.1864] [5.3.1905] [382], M. A.; Ph. D. (Erlangen); President of the American Mathematical Society; Member of the National Academy of Sciences (Washington); Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Contributor of the *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* Professor of Mathematics in Harvard University. *[Harvard University — Cambridge (Mass.) (U. S. A.)].*

PAINLEVÉ (Paul) [Paris (France): 5.12.1863] [28.4.1895] [221], docteur ès Sciences mathématiques; membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); membre et ancien Président de la Société Mathématique de France; membre de la Société Astronomique de France; membre étranger de la Kongl. Vetenskaps-Societeten (Societas Regia Scientiarum Upsaliensis); collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* (éditions allemande et française); professeur de Mathématiques générales à la Faculté des Sciences de Paris; répétiteur à l'École Polytechnique de Paris. *[Rue d'Assas, 33 — Paris, VI^e (France)].*

PANNELLI (Marino) [Macerata (Italia): 16.11.1855] [12.2.1905] [370], dottore in Matematica; libero docente di Geometria projettiva ed analitica nella R. Università di Roma; professore nel R. Istituto Tecnico « Leonardo da Vinci » di Roma. *[Via Cavour, 101 — Roma (Italia)].*

PASCAL (Ernesto) [Napoli (Italia): 7.2.1865] [24.12.1899] [277], dottore in Matematica; membro effettivo del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma) e dell'Accademia Pontaniana di Napoli; membro straniero della Kgl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften (Praga); membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Analisi superiore nella R. Università di Pavia. *[Via Principe Umberto, 29 — Milano (Italia)].*

* **PATERNÒ** (Francesco Paolo) [Novi Ligure (Alessandria) (Italia): 11.5.1852] [2.3.1884] [19], ingegnere-architetto; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; prof. straord. di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università di

Palermo; prof. di Matematica nel R. Istituto Tecnico « Filippo Parlatore » di Palermo. *[Via Pignatelli Aragona, 52 — Palermo (Italia)].*

PATERNÒ DI SESSA (Emanuele) [Palermo (Italia): 12.12.1847][8.4.1888][111], vice presidente del Senato del Regno; già sindaco di Palermo; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; corr. delle Reali Accademie di Napoli, di Torino, del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania), della Reale Accademia Peloritana di Messina, della Società Scientifica Argentina; membro onorario della Società di Scienze fisiche di Bukharest; membro della Società Chimica di Berlino e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; dottore onorario della R. Università di Erlangen; prof. onorario della R. Università di Palermo; direttore della *Gazzetta Chimica Italiana;* prof. ord. di Applicazioni della Chimica ed inc. di Chimica analitica nella R. Università di Roma. *[Via Nazionale, 13 — Roma (Italia)].*

PEANO (Giuseppe) [Cuneo (Italia): 27.8.1858][4.12.1887][83], dott. in Matem.; accademico residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; membro della Sociedad Cientifica « Antonio Alzate » (Messico); direttore della *Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica);* membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino. *[Via Barbaroux, 4 — Torino (Italia)].*

PENNACCHIETTI (Giovanni) [Arcevia (Ancona) (Italia): 25.7.1854][14.12.1890][167], dottore in Scienze Fisico-Matematiche; membro effettivo dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania); prof. ord. di Meccanica razionale ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Catania. *[R. Università — Catania (Italia)].*

PENSA (Angelo) [Savigliano (Cuneo) (Italia): 28.7.1875][12.2.1905][371], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Torino. *[R. Università — Torino (Italia)].*

* **PEPOLI** (Alessandro) [Palermo (Italia): 17.3.1852][2.3.1884][20], ingegnere; prof. nella R. Scuola Tecnica « Gagini »; bibliotecario del Circolo Matematico di Palermo. *[Via Isidoro La Lumia, 66 — Palermo (Italia)].*

PERAZZO (Umberto) [Nizza Monferrato (Alessandria) (Italia): 25.10.1878][3.4.1901][291], dottore in Matematica; dottore in Scienze Naturali; assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Torino. *[Corso Oporto, 13 — Torino (Italia)].*

PERNA (Alfredo) [Napoli (Italia): 21.9.1873][12.6.1898][253], dottore in Matematica; prof. nella R. Scuola Normale di Lecce. *[Discesa Sanità, 12 — Napoli (Italia)].*

PETROVITCH (Michel) [Belgrade (Serbie): 6.5.1868][10.1.1897][237], ancien élève de l'École Normale supérieure de Paris; licencié ès Sciences physiques; docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Srpska Kraljevska Akademija (Belgrade); membre de la Jugoslavenska Akademija Znanosti i Umjetnosti (Agram); membre de la Société Royale des Sciences de Prague; membre de la Société Mathématique de France; professeur à la Faculté des Sciences de Belgrade. *[Kossantch-Venac, 26 — Belgrade (Serbie)].*

PEXIDER (Jan Vilém) [Karlín (Böhmen) (Oesterreich): 22.12.1874][24.5.1903][320], Dr. phil. *[... — Prag (Böhmen) (Oesterreich)].*

PICARD (Charles-Émile) [Paris (France): 24.7.1856][13.4.1890][162], ancien élève de l'École Normale supérieure de Paris; docteur ès Sciences mathémat.; membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); docteur (honoris causa) en Mathématique de l'Université de Christiania; docteur honoraire « of Civil laws » de l'Université de Glasgow; docteur honoraire de l'Université Clark (États-Unis); membre et ancien Président de la Société Mathématique de France; associé étranger, membre honoraire, membre, ou correspondant, des Académies et Sociétés suivantes: Société des Sciences d'Athènes, Königl. Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin), Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, American Academy of Arts and Sciences (Boston), Kongl. Danske Videnskabernes Selskab (Co-

penhague), Physikalisch-Medizinische Sozietät in Erlangen, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Finska Vetenskaps-Societeten (Helsingfors), Société Mathématique de Kharkow, London Mathematical Society; Sociedad Científica « Antonio Alzate » (Mexico), Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano), Académie de Stanislas (Nancy), Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Reale Accademia dei Lincei (Roma), Reale Accademia delle Scienze di Torino, Kongl. Vetenskaps-Societeten (Societas Regia Scientiarum Upsaliensis), National Academy of Sciences (Washington); collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées ;* professeur d'Analyse supérieure et Algèbre supérieure à la Faculté des Sciences de Paris; professeur de Mécanique à l'École Centrale des Arts et Manufactures de Paris. *[Rue Bara, 4 — Paris, VI^e (France)].*

PIERI (Mario) [Lucca (Italia): 22.6.1860][10.3.1889][142], dott. in Matem.; socio effettivo dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania; socio corrispondente della Reale Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti; prof. ord. di Geometria projettiva e descrittiva, ed inc. di Geometria superiore, nella R. Università di Catania. *[R. Università — Catania (Italia)].*

PIETRA (Gaetano) [Castiglione delle Stiviere (Mantova) (Italia): 10.8.1879] [26.3.1905][385], dottore in Matematica; assistente di Geometria projettiva e assistente onorario di Geometria superiore, nella R. Università di Padova. *[Corso Vittorio Emanuele II, 3^b — Padova (Italia)].*

PINCHERLE (Salvatore) [Trieste: 11.3.1853][11.3.1888][108], dottore in Matematica; accademico benedettino, e vice presidente, della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze; socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen ;* membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Algebra e Geometria analitica, ed inc. di Matematiche superiori, nella R. Università di Bologna. *[R. Università — Bologna (Italia)].*

* **PINTACUDA** (Carlo) [Palermo (Italia): 8.12.1837][2.3.1884][21], ing.; già prof. di Meccanica applicata alle Macchine, e di Costruzioni stradali e ferroviarie, nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Palermo; socio corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Palermo. *[Via Ingham, 18 — Palermo (Italia)].*

PINTACUDA (Michele) [Palermo (Italia): 27.6.1874][5.3.1905][383], ingegnere. *[Via Torrearsa, 1 — Palermo (Italia)].*

PISATI (Sig.na Laura) [...][26.2.1905][380], dottoressa in Matematica; insegnante nella R. Scuola Tecnica femminile « Marianna Dionigi » in Roma. *[Via Polveriera, 1 — Roma (Italia)].*

PITTARELLI (Giulio) [Campochiaro (Campobasso) (Italia): 2.2.1852][24.2.1889], [141], ingegnere; dottore in Matematica; socio corrispondente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; prof. ord. di Geometria descrittiva con disegno nella R. Università di Roma e di Applicazioni di Geometria descrittiva nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma; inc. delle conferenze alla Scuola di Magistero per la Matematica. *[Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma (Italia)].*

PIUMA (Marchese Carlo Maria) [Genova (Italia): 26.9.1837][4.12.1887][84], arch.-ingegnere; membro della Società Ligure di Storia Patria; prof. ord. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Genova. *[Via S. Sebastiano, 6 — Genova (Italia)].*

POINCARÉ (Henri) [Nancy (Meurthe-et-Moselle) (France): 29.4.1854][23.3.1890] [161], ancien élève de l'École Polytechnique de Paris; docteur ès Sciences mathématiques; ingénieur des Mines; membre de l'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); membre et ancien président de la Société Mathématique de France, de la Société Astronomique de France et de la Société Française de Physique; membre de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences; associé étranger, membre honoraire, membre, ou correspondant, des Académies et Sociétés suivantes; Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam), Königl. Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin), Reale Accademia delle Scienze dell'Isti-

tuto di Bologna, Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (Bruxelles), Cambridge Philosophical Society, Kongl. Danske Videnskabernes Selskab (Copenhague), Royal Society of Edinburgh, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen (Haarlem), Royal Society of London, London Mathematical Society, Royal Astronomical Society of London, Manchester Literary and Philosophical Society, Königl. Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München, Società Reale (R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche) di Napoli, American Philosophical Society of Philadelphia, Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (Rome), Reale Accademia dei Lincei (Rome), Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien (Stockholm), Reale Accademia delle Scienze di Torino, Kongl. Vetenskaps-Societeten (Societas Regia Scientiarum Upsaliensis), Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venise), National Academy of Science of Washington; etc.; docteur (honoris causa) en Mathématique de l'Université de Christiania; docteur honoraire en Philosophie de l'Université de Klausenburg; docteur honoraire en Sciences de l'Université de Oxford; SYLVESTER MEDALLIST of the Royal Society of London (1901); président de la « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; collaborateur de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées;* membre de la « Commission internationale pour la MÉDAILLE GUCCIA (1908) »; membre du Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; membre du Bureau des Longitudes; professeur d'Astronomie mathématique et Mécanique celeste à la Faculté des Sciences de Paris. *[Rue Claude-Bernard, 63 — Paris, Vᵉ (France)].*

* **POLITI** (Giuseppe) [Palermo (Italia): 4.8.1852] [2.3.1884] [23], ing.; socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; vice segretario del Circolo Matematico di Palermo; capo divisione presso la Società Italiana per le Strade Ferrate della Sicilia. *[Via Pergole, 14 — Palermo (Italia)].*

POMPEIU (Démètre) [Broscautzi (Roumanie): 22.9.1873] [12.2.1905] [372], docteur ès Sciences mathématiques. *[Rue Daubenton, 42 — Paris, Vᵉ (France)].*

PORCELLI (Onofrio) [...] [13.5.1894] [206], preside, e professore di Matematiche, del R. Istituto Tecnico « Pitagora » di Bari. *[R. Istituto Tecnico — Bari (Italia)].*

* **PORCELLI** (Salvatore) [Palermo (Italia): 16.11.1843] [2.3.1884] [24], ingegnere; già prof. di Geometria descrittiva e Costruzioni rurali nell'Istituto Tecnico di Trapani (1874-1880); socio del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo; tesoriere del Circolo Matematico di Palermo. *[Via Filippo Parlatore, 22 — Palermo (Italia)].*

PRYM (Friedrich) [Düren (Preussen) (Deutschland): 28.9.1841] [12.2.1905] [373], Dr. phil.; korr. Mitglied der Physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen; korr. Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Mathematik an der Kgl. Julius-Maximilians-Universität Würzburg. *[Schweinfurterstr. 3 1/4 — Würzburg (Bayern) (Deutschland)].*

PUGLISI (Mattia) [Messina (Italia): 6.4.1871] [26.6.1898] [254], dottore in Matematica. *[Via Vittorio Emanuele, 164 — Trapani (Italia)].*

REINA (Vincenzo) [Como (Italia): 22.11.1862] [12.1.1890] [155], dottore in Matematica; prof. ord. di Geodesia e Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma. *[Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma (Italia)].*

REPETTO (Giuseppe) [Sassari (Italia): 18.1.1872] [12.2.1905] [374], dottore in Matematica; prof. nel R. Ginnasio di Sassari. *[Largo Pazzola, 1 — Sassari (Italia)].*

RETALI (Virginio) [Marciana Marina (Livorno) (Italia): 24.11.1853] [27.2.1887] [63], dottore in Matematica; prof. nel R. Liceo « Cesare Beccaria » di Milano. *[R. Liceo Cesare Beccaria — Milano (Italia)].*

RICCI (Gregorio) [Lugo (Ravenna) (Italia): 12.1.1853] [23.12.1894] [212], dottore in Scienze Fisico-Matematiche; membro effettivo del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia); socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; prof. ord. di Algebra complementare ed inc. di Fisica Matematica nella R. Università di Padova. *[Piazza Vittorio Emanuele IIº, 29 — Padova (Italia)].*

RINDI (Scipione) [Lucca (Italia): 29.10.1859] [13.2.1887] [61], dott. in Matematica; prof. nel R. Liceo « Niccolò Machiavelli » in Lucca. *[Via Elisa, 14—Lucca (Italia)].*

RIPAMONTI (Sig.na Maria) [Sondrio (Italia): 28.11.1878] [22.5.1904] [328], dottoressa in Matematica; insegnante di Matematica nella R. Scuola Normale Femminile « Domina », con convitto, di Petralia Sottana. *[R. Scuola Normale Femminile — Petralia Sottana (Prov. di Palermo) (Italia)].*

RIUS Y CASAS (José) [Barcelona (España): 27.3.1867] [22.5.1904] [329], Doctor en Ciencias Fisico-Matemáticas; socio correspondiente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona; miembro de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; director de la *Revista Trimestral de Matemáticas*; Catedrático Numerario de Análisis Matemático en la Universidad de Zaragoza. *[Calle de Sainz de Varanda, 8, barrio de las Acacias, Torrero — Zaragoza (España)].*

RONCO (Nino Emilio) [Genova (Italia): 27.11.1865] [13.2.1898] [247], ing.; dott. in Matematica; assistente alla cattedra di Geometria projettiva nella R. Università di Genova; prof. di Idraulica e Macchine idrauliche nella Scuola Superiore Navale di Genova. *[Via Roma, 10 — Genova (Italia)].*

ROSANES (Jakob) [Brody (Galizien) (Oesterreich): 16.8.1842] [26.3.1905] [389], Geh. Reg.-Rat; Dr. phil.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Mathematik an der Kgl. Universität Breslau. *[Schweidnitzer Stadtgraben 16 b — Breslau (Preussen) (Deutschland)].*

RUDIO (Ferdinand) [Wiesbaden (Preussen) (Deutschland): 2.8.1856] [24.4.1898] [251], Dr. phil.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Professor der höheren Mathematik an der Eidgenössischen Polytechnischen Schule zu Zürich. *[Feldeggstr. 64 — Zürich (Schweiz)].*

RUSSO (Giovanni) [Catanzaro (Italia): 1.9.1851] [26.8.1888] [130], prof. di Matematica nell'Istituto Tecnico pareggiato e nella Scuola Tecnica pareggiata di Catanzaro. *[Via Scalfaro, 3 — Catanzaro (Italia)].*

SADUN (Elcla) [Pitigliano (Grosseto) (Italia): 29.1.1858] [28.4.1889] [146], dottore in Matematica; prof. nel R. Istituto Tecnico « Leonardo da Vinci » di Roma. *[R. Istituto Tecnico — Roma (Italia)].*

SALVATORE-DINO (Nicola) [Torre Annunziata (Napoli) (Italia): 12.11.1843] [4.12.1887] [85], socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; corrispondente della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; prof. ord. di Geometria analitica nella R. Università di Napoli. *[Via Duomo, 77—Napoli (Italia)].*

SANNIA (Gustavo) [Napoli (Italia): 13.5.1875] [25.12.1904] [345], dottore in Matematica. *[Via Corte d'Appello, 7 — Torino (Italia)].*

SBRANA (Umberto) [Pisa (Italia): 2.3.1882] [25.12.1904] [346], dottore in Matematica; assistente alla cattedra di Analisi infinitesimale nella R. Università di Pisa. *[Via Franceschi, 4, 3° p° — Pisa (Italia)].*

SCHEFFERS (Georg Wilhelm) [Altendorf (Braunschweig) (Deutschland): 21.11.1866] [9.2.1902] [307], Dr. phil.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Mitarbeiter an der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen*; ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. *[Wittmannstr. 60 — Darmstadt (Hessen) (Deutschland)].*

SCHLEGEL (Victor) [Frankfurt a./O. (Preussen) (Deutschland): 4.3.1843] [13.5.1888] [119], Dr. phil.; Mitglied der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle); Mitglied der Société Mathématique de France; Mitglied der American Mathematical Society; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Professor der Mathematik an der Königl. höheren Maschinenbauschule zu Hagen i./W. *[Volmestr. 62 — Hagen i./W. (Preussen) (Deutschland)].*

SCHOUTE (Pieter Hendrik) [Wormerveer (Pays-Bas): 21.1.1846] [25.12.1904] [347], ingénieur; docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, de la Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen (Haarlem), de la Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke (Rotterdam), de la Wiskundig Genootschap (Amsterdam), de la London Mathematical Society, de la Société Mathématique de France (Paris), de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; membre de la « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; rédacteur en chef de la *Revue Semestrielle des Publica-*

tions Mathématiques; rédacteur du *Nieuw Archief voor Wiskunde*; professeur de Géométrie à l'Université de Groningue. [*Universiteit — Groningen (Pays-Bas)*].

SCHUR (Friedrich) [Maciejewo, Provinz Posen, Preussen) (Deutschland): 27.1.1856] [8.1.1905] [350], Dr. phil.; Mitglied der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle); Mitglied der Société Royale des Sciences de Liége; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; ord. Professor der Geometrie und Graphische Statik, und Rektor, an der Grossherzogl. Technischen Hochschule zu Karlsruhe. [*Linkenheimerstr. 15 — Karlsruhe (Baden, (Deutschland)*].

SCOTT (Charlotte Angas) [Lincoln (Lincolnshire) (England): 8.6.1858] [9.1.1898] [243], D. Sc. (London); Member of the London Mathematical Society; Member of the Edinburgh Mathematical Society; Member of the American Mathematical Society; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; Honorary Member of the Wiskundig Genootschap (Amsterdam); Co-Editor of the *American Journal of Mathematics*; Professor of Mathematics at Bryn Mawr College. [*Bryn Mawr College — Bryn Mawr (Pa.) (U. S. A)*].

SEGRE (Corrado) [Saluzzo (Cuneo) (Italia): 20.8.1863] [27.7.1887] [68], dottore in Matematica; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); accademico residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio straniero della Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (Bruxelles); membro onorario della Cambridge Philosophical Society; socio corrispondente della Physikalisch-medizinische Sozietät in Erlangen e del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; membro della « Commissione internazionale per la Medaglia Guccia (1908) »; redattore degli *Annali di Matematica pura ed applicata*; collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen*; prof. ord. di Geometria superiore nella R. Università di Torino. [*Corso Vittorio Emanuele, 85 — Torino (Italia)*].

SETTIMO (Girolamo) Principe di Fitalia [Palermo (Italia): 2.2.1846] [12.2.1905] [375], gentiluomo di corte di S. M. la Regina Madre; membro della Società Siciliana per la Storia Patria (Palermo); socio della Società di Acclimazione e di Agricoltura in Sicilia (Palermo); rappresentante il fondatore dell'Istituto Agrario Castelnuovo di Palermo. [*Piazza S. Cecilia, 44 — Palermo (Italia)*].

SEVERI (Francesco) [Arezzo (Italia): 13.4.1879] [24.2.1901] [287], dottore in Matematica; prof. ord. di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università di Parma. [*R. Università — Parma (Italia)*].

SIACCI (Francesco) [Roma (Italia): 20.4.1839] [8.1.1905] [351], dott. in Matem.; Colonnello d'Artiglieria nella Riserva; deputato di Roma nelle legislature XVI e XVII; senatore del Regno; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio ordinario residente della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; accademico nazionale non residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano) e della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; prof. onorario della R. Università di Torino; prof. ord. di Meccanica razionale e inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Napoli. [*Corso Umberto I°, 179 — Napoli (Italia)*].

SINIGALLIA (Luigi) [Ferrara (Italia): 18.9.1864] [26.1.1902] [306], dottore in Matematica. [*Via Bettino Ricasoli, 2 — Milano (Italia)*].

SOFIO (Luigi) [Messina (Italia): 22.7.1857] [12.6.1904] [332], General Manager in Italy of the Anglo-Sicilian Sulphur Company Ld. [*Piazza Giovanni Meli, 5 — Palermo (Italia)*].

SOLER BALSANO (Emanuele) [Palermo (Italia): 29.8.1867] [3.1.1892] [179], ing.; dottore in Matematica; socio corrispondente della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo e della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio ordinario della Reale Accademia Peloritana di Messina; prof. straord. di Geodesia teoretica nella R. Università di Messina. [*R. Università — Messina (Italia)*].

SOMIGLIANA (Nob. Carlo) [Como (Italia): 20.9.1860] [28.1.1894] [199], dottore in

Matem.; socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); prof. ord. di Fisica Matematica nella R. Università di Torino. *[R. Università — Torino (Italia)].*

STÉPHANOS (Cyparissos) [Zea (Cyclades) (Grèce): 11/23.5.1857] [28.8.1904] [337], docteur en Philosophie de l'Université d'Athènes (1878); docteur ès Sciences de l'Université de Paris (1884); membre de la Société Philomathique de Paris; membre correspondant de la British Association for the Advancement of Science; membre de la Société Mathématique de France; membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; membre de la « Commission permanente internationale du *Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* »; président de l'Union des professeurs grecs; directeur de l'École publique de Commerce d'Athènes; professeur de Mathématiques à l'Université d'Athènes; professeur de Calcul différentiel et intégral à l'École Polytechnique d'Athènes. *[Rue de Solon, 20 — Athènes (Grèce)].*

STRAZZERI (Vittorio) [Terranova di Sicilia (Caltanissetta) (Italia): 2.7.1874] [9.6.1901] [296], dottore in Matematica; prof. nella R. Scuola Tecnica di Sassari. *[R. Scuola Tecnica — Sassari (Italia)].*

TAGLIARINI (Rodolfo) [Palermo (Italia): 17.3.1871] [26.3.1899] [272], dottore in Matematica; prof. nella R. Scuola Tecnica di Piazza Armerina. *[R. Scuola Tecnica— Piazza Armerina (Prov. di Caltanissetta) (Italia)].*

TASCHETTI (Giuseppe) [Licata (Girgenti) (Italia): 9.1.1852] [4.4.1886] [42]; prof. nel R. Ginnasio G. B. Vico di Napoli. *[S. Mandato, 50 — Napoli (Italia)].*

TEDONE (Orazio) [Ruvo di Puglia (Bari) (Italia): 10.5.1870] [8.12.1901] [300], dottore in Matematica; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; collaboratore della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* prof. straord. di Meccanica razionale nella R. Università di Genova. *[R. Università — Genova (Italia)].*

TOFFOLETTI (Carlo) [Venezia (Italia): 12.2.1879] [22.3.1903] [314], dottore in Matematica. *[Rio terrà Catecumeni, 121 — Venezia (Italia)].*

TOJA (Guido) [Firenze (Italia): 25.4.1870] [10.6.1900] [281], ingegnere; membro corrispondente dell'Institute of Actuaries di Londra; attuario della R. Commissione per la determinazione e ripartizione dei disavanzi degli Istituti di Previdenza ferroviari; attuario della Fondiaria-Vita. *[Via Pellicceria, 8 — Firenze (Italia)].*

TONELLI (Alberto) [Lucca (Italia): 25.12.1849] [4.12.1887] [86], dott. in Matem.; corrispondente della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; rettore della R. Università di Roma; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Algebra complementare nella R. Università di Roma. *[Piazza S. Pietro in Vincoli, 5 — Roma (Italia)].*

TORELLI (Gabriele) [Napoli (Italia): 26.3.1849] [24.6.1888] [122], dott. in Matem.; socio residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli; socio ordinario non residente della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli; socio attivo della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio corr. della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; preside della Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, prof. ord. di Calcolo infinitesimale, ed inc. di Fisica matematica, nella R. Università di Palermo. *[Via Malaspina, 68 — Palermo (Italia)].*

TORELLI (Ruggiero) [Napoli (Italia): 7.6.1884] [26.2.1905] [381], dottore in Matematica. *[Lungarno Gambacorti, 23 — Pisa (Italia)].*

TRAFELLI (Luigi) [Nettuno (Roma) (Italia): 7.6.1881] [10.1.1904] [327], dottore in Matematica. *[Nettuno (Prov. di Roma) (Italia)].*

TRAVERSO (Niccolò) [Savona (Genova) (Italia): 5.7.1872] [14.2.1897] [238], dott. in Matem.; prof. nel R. Liceo « Govone » di Alba. *[R. Liceo—Alba (Prov. di Cuneo) (Italia)].*

VACCA (Giovanni) [Genova (Italia): 18.11.1872] [15.1.1899] [264], dottore in Matematica. *[Via Palestro, 11 — Genova (Italia)].*

VAILATI (Giovanni) [Crema (Cremona) (Italia): 23.4.1863] [11.3.1894; 12.3.1905] [203], dottore in Matematica; prof. nel R. Istituto Tecnico « Galileo Galilei » di Firenze. *[R. Istituto Tecnico — Firenze (Italia)].*

VALERI (Demetrio) [Codogno (Milano) (Italia): 22.12.1848] [9.7.1893] [194], ingegnere; libero docente di Geometria projettiva nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano; R. Provveditore agli studî in Piacenza. *[Piacenza (Italia)].*

VASSILIEF (Alexandre) [Kasan (Russie): 5.7.1853] [22.1.1899] [265], docteur ès Sciences mathématiques; membre des Sociétés Mathématiques de Kharkow, Kiew et Moscou; membre perpétuel de la Société des Amis des Sciences Naturelles, d'Anthropologie et de Ethnographie de Moscou; membre honoraire de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, de l'Institut 19 septembre de Lisbonne et de la Société Scientifique de Nijnii-Novgorod; membre de la Société Mathématique de France; membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; président de la Société Physico-Mathématique de Kasan; professeur émérite de l'Université Impériale de Kasan. *[Université — Kasan (Russie)].*

VENERONI (Emilio) [Milano (Italia): 5.11.1874] [23.6.1901] [297], dott. in Matem.; libero docente di Geometria projettiva nella R. Università di Pavia; prof. nel R. Istituto Tecnico « Leonardo da Vinci » di Alessandria della Paglia. *[R. Istituto Tecnico — Alessandria della Paglia (Italia)].*

VENTURI (Adolfo) [Firenze (Italia): 22.9.1852] [5.2.1888] [96], dott. in Matem.; vice presidente della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio ord. della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; socio corrispondente della Reale Accademia dei Lincei (Roma); prof. ord. di Geodesia teoretica ed inc. di Meccanica superiore nella R. Università di Palermo. *[Corso Calatafimi, 315 — Palermo (Italia)].*

VERDE (Felice) [Genova (Italia): 30.9.1852] [27.12.1896] [232], ing.; Comandante della R. Marina al riposo; membro della British Astronomical Association (Londra), della Royal Society of New South Wales (Sydney) e della Society for the Encouragement of Arts, Manufactures and Commerce (London). *[Via Fazio, 7 — Spezia (Prov. di Genova) (Italia)].*

VERONESE (Giuseppe) [Chioggia (Venezia) (Italia): 7.5.1854] [11.3.1888] [110], dottore in Matematica; senatore del Regno; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio nazionale della Reale Accademia dei Lincei (Roma); membro effettivo del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia); aggregato al Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); socio corrispondente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; socio ordinario della Reale Accademia delle Scienze di Padova e dello Ateneo Veneto; membro straniero della Magyar Tudományos Akadémia (Budapest); membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; prof. ord. di Geometria analitica ed inc. di Geometria superiore nella R. Università di Padova. *[R. Università — Padova (Italia)].*

VITALI (Giuseppe) [Ravenna (Italia): 26.8.1875] [27.5.1900] [280], dottore in Matematica; prof. nel R. Liceo « Cristoforo Colombo » di Genova. *[R. Liceo Cristoforo Colombo — Genova (Italia)].*

VITERBI (Adolfo) [Mantova (Italia): 27.9.1873] [27.12.1896] [233], dottore in Matematica; ingegnere; libero docente di Meccanica razionale ed inc. di Statica grafica nella R. Università di Pavia. *[R. Università — Pavia (Italia)].*

VIVANTI (Giulio) [Mantova (Italia): 24.5.1859] [18.12.1887] [90], ing.; dottore in Matematica; socio della Reale Accademia Virgiliana di Mantova; socio ordinario, e vice-direttore della classe di Scienze Naturali, Fisiche e Matematiche, della Reale Accademia Peloritana di Messina; prof. ord. di Calcolo infinitesimale ed inc. di Matematiche superiore nella R. Università di Messina. *[R. Università — Messina (Italia)].*

VOLTERRA (Vito) [Ancona (Italia): 3.5.1860] [4.12.1887] [87], dott. in Fisica; dott. (honoris causa) in Matematica della Università di Christiania e dell'Università di Cambridge; senatore del Regno; uno dei XL della Società Italiana delle Scienze (Roma); socio nazionale (e amministratore) della Reale Accademia dei Lincei (Roma); accademico nazionale non residente della Reale Accademia delle Scienze di Torino; membro corrispondente dell'Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie); socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania); membro nazionale della Società degli Spettroscopisti Italiani; socio corrispondente del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano), della Reale Accademia delle Scienze

dell'Istituto di Bologna e della Reale Accademia delle Scienze, Lettere ed Arti di Modena; membro onorario della Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux; membro della Société Mathématique de France; membro della Deutsche Mathematiker-Vereinigung; co-direttore del *Nuovo Cimento;* membro del Consiglio Direttivo del Circolo Matematico di Palermo; prof. ord. di Fisica matematica ed inc. di Meccanica celeste nella R. Università di Roma. *[Via in Lucina, 17 — Roma (Italia)].*

VRIES (Jan de) [Amsterdam (Pays-Bas): 1.3.1858] [14.6.1891] [178], docteur ès Sciences mathématiques et physiques; membre de la Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam et de la Wiskundig Genootschap (Amsterdam); membre de la Provinciaal Utrechtsch Genootschap; membre de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung; rédacteur des *Wiskundige Opgaven* et de la *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques;* professeur à l'Université de Utrecht. *[Nienwegracht 12 — Utrecht (Pays-Bas)].*

WEBER (Eduard Ritter von) [München (Bayern) (Deutschland): 12.5.1870] [27.2.1898] [249], Dr. phil.; Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Mitarbeiter an der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* ausserord. Professor der Mathematik an der Kgl. Bayerischen Ludwig-Maximilians-Universität München. *[Alexandrastr. 1 — München (Bayern) (Deutschland)].*

WIRTINGER (Wilhelm) [Ybbs a. d. Donau (Oesterreich): 19.7.1865] [12.2.1905] [376], Dr. phil.; Doctor (honoris causa) der Universität Christiania; korr. Mitglied der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften (Wien); Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Herausgeber der *Monatshefte für Mathematik und Physik;* Mitarbeiter an der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* ord. Professor der Mathematik an der K. K. Universität Wien. *[Edelhofgasse 19 — Wien, XVIII (Oesterreich)].*

YOUNG (William Henry) [London (England): 20.10.1863] [12.2.1905] [377], M.A.; Sc. D.; Member of the London Mathematical Society; Fellow of the Cambridge Philosophical Society; Member of the American Mathematical Society; Member of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung; formerly Fellow of Peterhouse, Cambridge, England; Lecturer in Mathematics of the Girton College, Cambridge, England. *[Peterhouse—Cambridge (England)] [Wilhelm Weber-Str. 44 a — Göttingen (Preussen) (Deutschland)].*

ZAPPETTA (Antonio) [Foggia (Italia): 13.5.1875] [22.5.1904] [330], dottore in Matematica. *[Via Le Orfane, 36 — Foggia (Italia)].*

ZAREMBA (Stanislas) [Romanoffka (Russie): 3.10.1863] [23.3.1902] [308], docteur ès Sciences mathématiques; membre de la Société Mathématique de Kharkoff; membre de la Société Mathématique de France; professeur de Mathématiques à l'Université de Cracovie. *[Rue Biskupia, 5 — Cracovie (Galicie) (Autriche)].*

ZEUTHEN (Hieronymus Georg) [Grimstrup (Jylland) (Danmark): 15.2.1839] [22.1.1905] [357], Dr. phil. (Copenhague); docteur (honoris causa) en Mathématique de l'Université de Christiania; membre honoraire, membre, ou correspondant, des Académies et Sociétés suivantes: Cambridge Philosophical Society, Videnskabs-Selskabet (Christiania), Kongl. Danske Videnskabernes Selskab (Copenhague), Physikalisch-medizinische Sozietät in Erlangen, Kgl. Wetenskaps och Witterhets Samhället (Gothembourg), London Mathematical Society, Kgl. Physiographiska Sällskapet (Lund), Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Institut de France (Académie des Sciences, section de Géométrie) (Paris), Société Philomathique de Paris, Société Mathématique de France (Paris), Reale Accademia dei Lincei (Roma), Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademien (Stockholm), Reale Accademia delle Scienze di Torino; collaborateur de l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen;* professeur ord. de Mathématiques à l'Université et à l'École Polytechnique de Copenhague. *[St. Kannikestræde 11 — Köbenhavn, K. (Danmark)].*

ZONA (Temistocle) [Porto Tolle (Rovigo) (Italia): 7.5.1848] [7.2.1886] [39], socio attivo della Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo; socio della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo; membro della Società degli Spettroscopisti Italiani; 1° astronomo aggiunto del R. Osservatorio Astronomico di Palermo; libero docente di Astronomia e prof. straord. di Geografia fisica nella R. Università di Palermo. *[R. Osservatorio Astronomico, Palazzo Reale—Palermo (Italia)].*

NOTE STATISTICHE

1. — Stato della Società al 26 marzo 1905.

Soci residenti			36
Soci non residenti	dimoranti in Italia	138	
	dimoranti all'Estero	81	
		219	219
Totale			255

2. — Movimento nel numero dei Soci dal 2 marzo 1904 al 26 marzo 1905.

Soci al 2 marzo 1904 (cfr. l'*Annuario* del 1904, ovvero il t. XVIII, p. XXII, dei *Rendiconti*)		195
Ammissioni di nuovi Soci (dopo il 2 marzo 1904)	65 [1]	
Riammissioni di antichi Soci (idem)	9	
	74	
Per decessi, dimissioni, cessazioni di pagamento e radiazioni (idem)	14	
	60	60
Soci al 26 marzo 1905		255

3. — Movimento nel numero dei Soci dal 2 marzo 1884 al 26 marzo 1905.

Soci ammessi nelle sedute degli anni:

			167		242
1884	27 [2]	1891	11	1898	17
1885	8	1892	7	1899	18
1886	14	1893	10	1900	6
1887	41	1894	18	1901	18
1888	46	1895	11	1902	11
1889	17	1896	9	1903	14
1890	14	1897	9	1904	21 [3]
	167		242		347

Nuovi soci ammessi nelle sedute dall'8 gennajo al 26 marzo 1905	45
Totale dei soci ammessi a tutto il 26 marzo 1905	392
Per decessi, dimissioni, cessazioni di pagamento e radiazioni, dal 2 marzo 1884 al 26 marzo 1905	137 [4]
Soci al 26 marzo 1905	255

4. — Progressi della Società dalla sua fondazione [5].

2 marzo	1884: *soci*	27	31 marzo	1892: *soci*	158	17 aprile	1903: *soci*	188
31 luglio	1887: »	63	26 gennaio	1896: »	171	2 marzo	1904: »	195
11 marzo	1888: »	102	10 luglio	1898: »	174	26 marzo	1905: »	255
9 febbrajo	1890: »	143	5 aprile	1900: »	180			

[1]) Nelle sedute dal 22 maggio 1904 al 26 marzo 1905. — [2]) I soscrittori dello Statuto provvisorio del 2 marzo 1884. — 3) Cioè: 1 nella seduta del 10 gennaio e 20 nelle sedute dal 22 maggio al 25 dicembre 1904. — 4) In questo numero (che dà una media annuale di 6 1/2 all'incirca) non si comprendono le dimissioni, etc. di quei Soci che furon di poi riammessi nella Società. — 5) Cfr. gli Elenchi generali di Soci pubblicati negli *Annuari* del 1884, 1888, 1890, 1892, 1896, 1898, 1900, 1904 e nei tomi: I (1884-87), pp. III-VII; II (1888), pp. 13-22; IV (1890), pp. XI-XXIV; VI (1892), pp. VII-XXVI; X (1896), pp. VII-XXIX; XII (1898), pp. VII-XXX; XIV (1900), pp. VII-XXX; XVII (1903), pp. V-XXII; XVIII (1904), pp. V-XXII, dei *Rendiconti*.

ISTITUTI E PERIODICI SCIENTIFICI

COI QUALI IL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO SCAMBIA I SUOI *Rendiconti.*

Amsterdam : Wiskundig Genootschap te Amsterdam.
— *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques.*
Austin : Texas Academy of Science.
Baltimore : *American Journal of Mathematics.*
Berlin : Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften.
— *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*
— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*
Bologna : Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.
— *Il Bollettino di Matematica.*
Bordeaux : Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.
Boulder : University of Colorado.
Bruxelles : Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.
Cambridge (Engl.) : Cambridge Philosophical Society.
Cambridge (Mass.) (U.S.A.) : *Annals of Mathematics.*
Coimbra : *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas.*
Dublin : Royal Irish Academy.
Edinburgh : Edinburgh Mathematical Society.
Erlangen : Physikalisch-medizinische Sozietät in Erlangen.
Gand : *Mathesis.*
Genève : *L'Enseignement Mathématique.*
Göttingen : Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Halifax : Nova Scotian Institute of Science.
Hamburg : Mathematische Gesellschaft in Hamburg.
Helsingfors : Finska Vetenskaps-Societeten.
Innsbruck : Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck.
Kasan : Société Physico-Mathématique de Kasan.
Kharkow : Université Impériale de Kharkow.
— Société Mathématique de Kharkow.
Kiew : Université Impériale de St.-Vladimir de Kiew.
Köbenhavn : *Nyt Tidsskrift for Matematik.*
Kraków : Akademia Umiejetności w Krakowie.
Lawrence : University of Kansas.
Leipzig : Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.
— Deutsche Mathematiker-Vereinigung.
— *Mathematische Annalen.*
— *Zeitschrift für Mathematik und Physik.*
— *Bibliotheca Mathematica.*
Lemberg : Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg.
Liége : Société Royale des Sciences de Liége.
Lisboa : Club Militar Naval.
Livorno : *Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario.*
London : Royal Society of London.
— London Mathematical Society.
— *The Educational Times, and Journal of the College of Preceptors.*
Madison : Wisconsin Academy of Sciences, Arts, and Letters.
— Wisconsin Geological and Natural History Survey.
Marseille : *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.*
Messina : Reale Accademia Peloritana.
Mexico : Sociedad Científica « Antonio Alzate ».
Milano : Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
— *Annali di Matematica pura ed applicata.*
Modena : Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.
Moskwa : Société Mathématique de Moscou.
München : Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.

Napoli: Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (sezione della Società Reale di Napoli).
— Accademia Pontaniana.
— *Giornale di Matematiche di Battaglini.*
New York: American Mathematical Society.
Odessa: Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie.
Palermo: Reale Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.
— Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo.
— R. Osservatorio Astronomico.
— Collegio degli Ingegneri ed Architetti.
— Circolo Giuridico.
— *Nuovi Annali di Agricoltura Siciliana.*
— *Il Pitagora.*
Paris: Académie des Sciences.
— Société Philomathique de Paris.
— Société Mathématique de France.
— Association Française pour l'Avancement des Sciences.
— École Normale Supérieure.
— École Polytechnique.
— Bureau des Longitudes.
— *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*
— *Bulletin des Sciences Mathématiques.*
— *Nouvelles Annales de Mathématiques.*
— *L'Intermédiaire des Mathématiciens.*
— *Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires.*
— *Revue générale des Sciences pures et appliquées.*
Philadelphia: University of Pennsylvania.
Pisa: *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.*
— *Il Nuovo Cimento.*
Prag: Česká Akademie císaře Františka Josefa I.
— Königlich Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
— *Časopis pro pěstování Mathematiky a Fysiky.*
Rennes: *Travaux scientifiques de l'Université de Rennes.*
Roma: Reale Accademia dei Lincei.
— Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).
St.-Pétersbourg: Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.
Stockholm: Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien.
— Stockholms Observatorium.
— *Acta Mathematica.*
Stuttgardt: Mathematisch-naturwissenschaftlicher Verein in Württemberg.
Tōkyō: *Tōkyō Sūgaku-Butsurigakkwai Kiji-Gaiyō.*
Torino: Reale Accademia delle Scienze di Torino.
— *Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica).*
— *Formulaire Mathématique.*
— *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.*
Toronto: Canadian Institute.
Toulouse: *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.*
Upsala: Kongl. Vetenskaps-Societeten (Societas Regia Scientiarum Upsaliensis).
Venezia: Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.
Warszawa: *Prace Matematyczno-Fizyczne (Travaux Mathématiques et Physiques).*
Washington: National Academy of Sciences.
— Philosophical Society of Washington.
— Smithsonian Institution.
Wien: Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.
— v. Kuffner'sche Sternwarte.
— *Monatshefte für Mathematik und Physik.*
Zaragoza: *Revista Trimestral de Matemáticas.*

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

I GRUPPI FINITI DI TRASFORMAZIONI LINEARI DELLO SPAZIO CHE CONTENGONO OMOLOGIE.

Memoria di **G. Bagnera**, in Messina.

Adunanza del 12 giugno 1904.

Prefazione.

Nella prefazione al mio lavoro intitolato « *I Gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie* » *) ho promesso di far conoscere tutti i gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie, ed io ben volentieri avrei voluto prima d'ora sciogliere la mia promessa. Se non che, la dimostrazione della non esistenza di taluni gruppi, mi ha fatto ritardare di molto la presente pubblicazione; ad ogni modo, io mi trovo adesso in grado di esporre con pieno rigore i risultati della mia ricerca.

Ho trovato soltanto 8 gruppi di quelli che io chiamo *propri*, ma fra questi nessuno ve n'è che non fosse anche prima più o meno conosciuto; ciò mi fa fortemente dubitare se tutti i gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio non si siano diggià, in svariate circostanze, da loro stessi presentati, e che ben magro premio spetti a chi potesse risolvere il difficile problema della loro classificazione generale. Nonostante ciò, questa classificazione non è meno desiderata ed io credo di avervi apportato col presente lavoro un buon contributo.

I ragionamenti di cui mi sono avvalso sono di natura puramente geometrica: il metodo sintetico si presta assai bene in questo argomento

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XV, anno 1901.

e mi ha reso eccellente servizio. Sembra che lo stesso metodo possa portare più in là, e difatti mettendo a profitto una idea del signor H. Poincaré ho potuto stabilire con considerazioni di *Analysis situs* due equazioni numeriche che valgono anche per le trasformazioni lineari di spazio quale si voglia: ma mi riservo di far conoscere più tardi queste equazioni.

§ I. — I gruppi finiti di trasformazioni lineari della retta e del piano.

1. Anzitutto debbo passare in rassegna i gruppi finiti di trasformazioni lineari della retta e del piano, non perchè io abbia cose nuove a dire a loro riguardo, ma per mettere in rilievo talune circostanze che avrò in seguito bisogno di richiamare.

Un gruppo finito di trasformazioni lineari della retta può essere:

1) Il gruppo costituito della sola operazione identica I che lascia inalterati i singoli punti della retta.

2) Un gruppo ciclico Q_n, di grado $n > 1$, che lascia singolarmente inalterati due soli punti della retta detti poli del gruppo.

3) Un gruppo diedro Q_n^2 di grado $2n$ che si ottiene aggiungendo ad un gruppo ciclico Q_n un'operazione di secondo ordine che ne inverte i poli.

4) Un gruppo tetraedrico R_{12}, oloedricamente isomorfo al gruppo delle permutazioni pari di 4 cifre.

5) Un gruppo ottaedrico R_{24}, oloedricamente isomorfo al gruppo simmetrico delle permutazioni di 4 cifre.

6) Un gruppo icosaedrico R_{60}, oloedricamente isomorfo al gruppo delle permutazioni pari di 5 cifre.

Per i gruppi diedri Q_n^2 bisogna distinguere il caso di n dispari da quello di n pari. Nel primo caso Q_n^2 ha un solo divisore d'indice 2 che è il corrispondente gruppo ciclico Q_n; le operazioni di secondo ordine sono simili fra loro dentro Q_{2n}, ma i poli di ognuna di tali operazioni non sono simili, nel senso che non è possibile scambiare due siffatti poli mediante un'operazione del gruppo. Nel secondo caso Q_n^2 ha tre divisori d'indice 2 dei quali uno è Q_n e gli altri sono due gruppi diedri; le operazioni di secondo ordine non sono tutte simili dentro Q_n^2, ma si ripartiscono in due classi intransitive che appartengono rispettivamente ai

due menzionati divisori diedri, invece i poli di ogni operazione di secondo ordine sono simili.

Per $n = 2$ si ha il gruppo quadrinomio (*Vierergruppe*) Q_2^2 che è particolarmente interessante.

Quando si rappresentano le operazioni di Q_2^2 con sostituzioni binarie unimodulari, l'operazione identica si presenta *necessariamente* sotto i due aspetti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e quindi Q_2^2 è soltanto meriedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni binarie.

Questa osservazione è da ripetersi per tutti i gruppi Q_n^2 con n pari, perchè essi contengono dei divisori del tipo Q_2^2.

Un gruppo tetraedrico R_{12} ammette un solo divisore proprio *invariante* che è un Q_2^2; i poli di una operazione di terzo ordine di R_{12} non sono mai simili dentro R_{12}, come pure non sono simili una operazione di terzo ordine ed il suo quadrato.

Un gruppo ottaedrico R_{24} ha due divisori propri invarianti che sono il gruppo R_{12} in esso contenuto ed il relativo Q_2^2.

I poli delle operazioni di secondo ordine di questo Q_2^2 sono anche poli delle operazioni di quarto ordine di R_{24}. Tanto queste quanto quelle di terzo ordine sono simili dentro R_{24}, come pure sono simili i due poli di ognuna di tali operazioni; le 6 operazioni di secondo ordine di R_{24} che stanno fuori del divisore invariante Q_2^2, sono anche simili fra loro ma si comportano in modo diverso di quelle appartenenti al divisore ora detto: due di queste 6 operazioni generano, o un gruppo diedro di grado 6, oppure un gruppo quadrinomio che contiene soltanto una delle operazioni di Q_2^2.

Il gruppo R_{60} è semplice, cioè non ha divisori invarianti; le 15 operazioni di secondo ordine e le 20 operazioni di terzo ordine sono simili dentro R_{60}, e simili sono anche i poli di ognuna di tali operazioni; i due poli di ogni operazione di quinto ordine sono pure simili, ma dentro R_{60} una qualsivoglia di queste operazioni non è mai simile al suo quadrato. Un gruppo R_{60} contiene come divisori 6 gruppi Q_5^2, 10 gruppi Q_3^2, 5 gruppi Q_2^2 e 5 gruppi R_{12}.

I gruppi R_{12}, R_{24}, R_{60} non sono mai oloedricamente isomorfi ai corrispondenti gruppi di sostituzioni binarie unimodulari, perchè essi contengono divisori del tipo Q_2^2.

2. Io passo ora ai gruppi finiti di trasformazioni lineari del piano.

Questi gruppi, facendo astrazione del gruppo identico, si possono classificare come segue:

I. Gruppi di grado $n > 1$, che lasciano inalterato un punto e *conseguentemente* una retta non passante per questo punto.

II. Gruppi che permutano transitivamente i vertici di uno stesso triangolo.

III. Il gruppo della configurazione Hessiana Γ_{216} di C. JORDAN *) ed i suoi sottogruppi Γ_{72}, Γ_{36}.

IV. Il gruppo Γ_{360} di H. VALENTINER **) ed i suoi sottogruppi Γ_{60}.

V. Il gruppo Γ_{168} di F. KLEIN ***).

I gruppi I, che sono quelli che lasciano inalterati un punto O ed una retta r, saranno qui genericamente rappresentati col simbolo (Or). Un tale gruppo è, almeno meriedricamente, isomorfo al gruppo di trasformazioni lineari che si ha sopra la retta r; quando l'isomorfismo è meriedrico, alla identità sopra r corrisponde un gruppo costituito dalle potenze di una omologia di centro O ed asse r.

Se il gruppo di trasformazioni che si ha sopra r contiene un Q_2^2 come divisore, l'isomorfismo è *sempre meriedrico*, ed il gruppo (Or) contiene certo un'omologia involutoria di centro O.

Nel simbolo (Or) scriverò al posto del segno r uno dei segni:

$$I,\ Q_n,\ Q_n^2,\ R_{12},\ R_{24},\ R_{60}$$

qualora m'interessi di mettere in evidenza il gruppo di trasformazioni lineari che si ha sopra r, e scriverò O_ν al posto di O quando voglio mettere in evidenza l'ordine massimo ν delle dette omologie di centro O. Così il simbolo $(O_2 R_{12})$ rappresenta un gruppo di grado 24 che contiene una omologia involutoria di centro O e che trasforma i punti dell'asse r secondo un gruppo tetraedrico R_{12}.

3. Un gruppo II, cioè un gruppo che permuta transitivamente i

*) *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, s. I, v. VIII (1879).

**) *De endelige Transformations-Gruppers Theori.* Kjöb. Skrift., s. VI, v. V (1889).

***) *Ueber Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen.* Mathematische Annalen, v. XIV (1878).

vertici di uno stesso triangolo, può permutare questi vertici soltanto circolarmente o far loro subire tutte le permutazioni possibili.

Nel primo caso rappresento il gruppo col simbolo Δ^3_n e nel secondo caso col simbolo Δ^6_n, essendo sempre $n > 1$.

Un gruppo Δ^3_n contiene sempre un divisore invariante Δ_n d'indice 3 e di grado $n > 1$ che lascia singolarmente inalterati i vertici del corrispondente triangolo, e che perciò è del tipo:

$$\Delta_n \equiv (O_\nu\, Q_\mu),$$

dove O è uno qualunque dei vertici del triangolo e $\nu\mu = n$.

Non è però a credersi che il gruppo Δ_n, che entra come divisore invariante in un gruppo Δ^3_n, si possa scegliere ad arbitrio fra i gruppi finiti che lasciano fermi i vertici di un triangolo.

Ecco la maniera di formare tutti i gruppi Δ_n in discorso.

Sia Δ'_m un gruppo qualsivoglia di grado m che lasci fermi i vertici di un triangolo, e si trasformi Δ'_m con una operazione di terzo ordine che permuti questi vertici. Si hanno così tre gruppi:

$$\Delta'_m, \quad \Delta''_m, \quad \Delta'''_m,$$

i quali in generale non coincidono; però, siccome le operazioni di tutti questi gruppi sono due a due permutabili, esiste un gruppo finito Δ_n che contiene tutte e solo le operazioni dei detti tre gruppi. Il gruppo Δ_n, il cui grade n è sempre un multiplo di m, è contenuto come sottogruppo invariante in un Δ^3_n, perchè esso viene evidentemente trasformato in sè da ogni operazione di terzo ordine che permuta i vertici del triangolo.

Debbo segnalare i gruppi Δ^3_n che si hanno in corrispondenza ai valori $n = 3, 4$.

Per $n = 3$ si ha un gruppo Hessiano Δ^3_3 che lascia nello stesso tempo inalterati i quattro triangoli dei flessi di una cubica, permutandone soltanto circolarmente i vertici; esso è di grado 9 ed è costituito dell'identità e di 8 operazioni di terzo ordine permutabili due a due.

Il gruppo Δ^3_3 non è oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari, perchè in questo l'operazione identica si presenta *necessariamente* sotto i tre aspetti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{vmatrix},$$

dove ε denota una radice immaginaria cubica dell'unità.

Per $n = 4$ si ha il gruppo Δ_4^3 di grado 12 che è il gruppo *tetraedrico del piano,* oloedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari; esso lascia inalterato un solo triangolo ed è costituito dall'identità, di 3 omologie involutorie, che hanno per centri i vertici e per assi i lati del detto triangolo, e di 8 collineazioni del terzo ordine.

4. Un gruppo Δ_n^6 ha un solo divisore invariante d'indice 2 del tipo Δ_n^3 e tre divisori non invarianti d'indice 3, che sono del tipo $(O_v\, Q_\mu^2)$.

Un siffatto gruppo possiede inoltre un divisore invariante Δ_n d'indice 6 che lascia inalterati i singoli vertici del triangolo e che sta nel sottogruppo Δ_n^3.

Per costruire un gruppo Δ_n che sia divisore invariante di un Δ_n^6, si costruisca prima, nel modo avanti esposto, un Δ_m di un Δ_m^3, e si trasformi poi Δ_m con una operazione di secondo ordine che permuti due vertici del triangolo e lasci fermo il terzo. Il gruppo Δ_n, che contiene tutte e sole le operazioni di Δ_m e del suo trasformato ora detto, è evidentemente un divisore invariante di un Δ_n^6.

Per $n = 3$ si ha un gruppo Hessiano Δ_3^6 che lascia inalterati nello stesso tempo i quattro triangoli dei flessi di una cubica, permutandone in tutti i modi i vertici. Esso è costituito dell'identità, di 8 collineazioni di terzo ordine e di 9 omologie involutorie fra loro simili dentro il gruppo stesso.

Per $n = 4$ si ha il gruppo Δ_4^6, di grado 24, che è il gruppo *ottaedrico del piano;* esso lascia fermo un solo triangolo ed è oloedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari.

In generale osservo che l'isomorfismo tra un gruppo del tipo Δ_n^3 o del tipo Δ_n^6 ed il corrispondente gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari non è mai oloedrico tutte le volte che n è un multiplo di 3, perchè allora il gruppo di collineazioni che si considera contiene come divisore un gruppo Δ_3^3; invece l'isomorfismo oloedrico può sempre stabilirsi quando n non è multiplo di 3.

5. Io considero ora i gruppi III, cioè Γ_{36}, Γ_{72}, Γ_{216}.

Il gruppo Γ_{36} ha come divisore invariante un Δ_3^6 e, oltre alle operazioni di questo divisore avanti specificate, contiene 18 collineazioni di quarto ordine i cui quadrati coincidono due a due con le 9 operazioni

di secondo ordine che stanno in Δ_3^6. Ognuna delle menzionate operazioni di quarto ordine di Γ_{36} scambia due stessi dei quattro triangoli che il divisore Δ_3^6 lascia inalterati e contemporaneamente scambia i rimanenti due.

Il gruppo Γ_{72} contiene tre divisori del tipo Γ_{36} che s'intersecano secondo un gruppo Δ_3^6; all'infuori delle operazioni di questo divisore, due qualsivogliano gruppi Γ_{36} non hanno altre operazioni in comune, e perciò le operazioni di Γ_{72} che stanno fuori del divisore invariante Δ_3^6 sono $3 \times 18 = 54$ collineazioni di quarto ordine. Mediante le operazioni di Γ_{72} i quattro triangoli dei flessi subiscono tutte le permutazioni del gruppo quadrinomio transitivo.

Il gruppo principale Γ_{216} ha un solo divisore Γ_{72}, tre divisori del tipo Γ_{36} ed un solo divisore Δ_3^6. I sottogruppi Γ_{72} e Δ_3^6 sono invarianti in Γ_{216}, ma non sono tali i tre sottogruppi del tipo Γ_{36}; questi sono invece permutati soltanto circolarmente dal detto gruppo principale.

Oltre alle operazioni di Γ_{72} avanti dette, il gruppo Γ_{216} contiene 24 omologie di terzo ordine, 48 collineazioni di terzo ordine e 72 collineazioni di sesto ordine le quali hanno i quadrati coincidenti tre a tre con le 24 omologie di terzo ordine.

Ciascuna di queste $24 + 48 + 72 = 144$ operazioni lascia fermo uno dei triangoli dei flessi e permuta circolarmente gli altri tre; segue che il gruppo Γ_{216} è meriedricamente isomorfo al gruppo delle permutazioni pari di 4 cifre: alla permutazione identica corrisponde il divisore invariante Δ_3^6.

Il gruppo Γ_{216} contiene inoltre 9 divisori del tipo $(O_2 R_{12})$, uno per ogni centro O di omologia involutoria, e 4 divisori del tipo Δ_9^6, uno per ogni triangolo dei flessi.

I centri delle omologie del terzo ordine, che sono i vertici dei triangoli dei flessi, sono permutati transitivamente dal gruppo Γ_{216}; infine questo gruppo, giacchè contiene divisori del tipo Δ_3^3, non è oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari il quale è invece del grado $3 \times 216 = 648$.

6. Considero ora i gruppi Γ_{60}, Γ_{360} segnati IV.

Ciascuno dei gruppi Γ_{60} contenuti nel gruppo di H. Valentiner Γ_{360} è un gruppo icosaedrico del piano ed è isomorfo oloedricamente ad un gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari. Esso contiene 6 gruppi diedri $(O\,Q_5^2)$, 10 gruppi diedri $(O\,Q_3^2)$ e 5 gruppi tetraedrici piani Δ_4^3.

Il gruppo principale Γ_{360}, studiato prima da A. WIMAN *) e poi, molto più profondamente, dal Prof. F. GERBALDI **), è oloedricamente isomorfo al gruppo delle permutazioni pari di 6 cifre, e perciò è un gruppo semplice. Esso contiene 12 sottogruppi Γ_{60} che si dividono in due sestuple in corrispondenza alle due sestuple di coniche che Γ_{360} lascia inalterate

I gruppi Γ_{60} che appartengono ad una stessa sestupla subiscono tutte le permutazioni pari mediante le operazioni del gruppo principale, ma, dentro questo gruppo, le due sestuple non sono simili.

Il gruppo Γ_{360} contiene inoltre 30 gruppi ottaedrici piani Δ_4^6 che si scindono in due classi di 15 gruppi ciascuna le quali non possono portarsi l'una nell'altra mediante operazioni del gruppo principale Γ_{360}, e 10 gruppi Hessiani Γ_{36} che sono invece tutti simili fra loro.

Le operazioni di Γ_{360} sono, oltre dell'identità: 45 omologie involutorie, 80 collineazioni di terzo ordine, 90 collineazioni di quarto ordine e 144 collineazioni del quinto ordine.

Il gruppo Γ_{360} non è oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari, perchè contiene sottogruppi Γ_{36} e quindi sottogruppi Δ_3^3, di modo che il detto gruppo di sostituzioni è del grado $3 \times 360 = 1080$.

7. Finalmente considero il gruppo V che ho denotato con Γ_{168}. Questo gruppo, sfuggito, insieme al gruppo Γ_{360}, alla classificazione di C. JORDAN dei gruppi lineari d'ordine finito, fu poi trovato da F. KLEIN. Esso è un gruppo semplice, e come tale si era, anche prima che fosse conosciuto come gruppo di trasformazioni lineari del piano, presentato fra i gruppi modulari.

Il gruppo Γ_{168} contiene 8 divisori del tipo Δ_7^3 e 14 divisori ottaedrici piani Δ_4^6; questi 14 gruppi ottaedrici si scindono in due classi di 7 gruppi ciascuna che non si possono portare l'una nell'altra mediante operazioni di Γ_{168}: i tre divisori quadrinomi contenuti in un gruppo ottaedrico di una delle dette classi, che non sono invarianti rispetto a questo gruppo, sono invece invarianti in tre diversi gruppi ottaedrici appartenenti all'al-

*) *Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen.* Mathematische Annalen, v. XLVII (1896).

**) *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XII (1898), t. XIII (1899) e t. XIV (1900).

tra classe. Il gruppo Γ_{168} è costituito, oltre dell'identità, di 21 omologie involutorie, 56 collineazioni di terzo ordine, 42 di quarto e 48 di settimo ordine. Le operazioni di secondo ordine, come pure quelle di terzo e di quarto, sono simili dentro il gruppo principale; invece le operazioni del settimo ordine si scindono in due classi intransitive di 24 operazioni ciascuna.

Riguardo alla configurazione piana a cui il gruppo dà luogo, a me interessa osservare che non più di quattro centri delle 21 omologie in esso contenute si trovano sopra una stessa retta, e che non è possibile distribuire tutti i 21 centri sopra 6 rette concorrenti in un punto quale si voglia del piano.

Giacchè Γ_{168} non contiene sottogruppi Hessiani Δ_3^3, esso è oloedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari.

8. Ogni gruppo che rientra nelle categorie I e II lo dirò un gruppo *improprio* del piano, e chiamerò invece gruppo *proprio* ogni gruppo che rientra nelle categorie III, IV, V.

Un gruppo improprio lascia fermo un punto ed una retta oppure trasforma in sè un triangolo; inoltre esistono di siffatti gruppi di grado così elevato quanto si vuole.

I gruppi propri non lasciano fermo alcun punto del piano nè trasformano in sè alcun triangolo.

Ad eccezione di Γ_{60} e Γ_{168} tutti gli altri contengono sottogruppi Hessiani Δ_3^3; nessuno contiene gruppi diedri $(O\,Q_n^2)$ di grado maggiore di 10; soltanto Γ_{216} contiene omologie di terzo ordine e sottogruppi del tipo $(O_2\,R_{12})$.

Si osservi finalmente che la massima potenza del numero primo 2 che figura nei loro gradi è $2^3 = 8$. I sottogruppi di grado 8 contenuti in Γ_{360}, Γ_{168} sono omograficamente eguali; ciascuno di essi è costituito dell'identità, di 5 omologie involutorie e 2 collineazioni di quarto ordine. Invece quelli contenuti in Γ_{216}, ed anche nel suo divisore invariante Γ_{72}, sono di natura ben diversa dei precedenti; ognuno di essi è costituito dell'identità, di 6 collineazioni di quarto ordine ed una sola omologia involutoria.

§ II. — I gruppi finiti impropri di trasformazioni lineari dello spazio.

9. Io ho dimostrato altrove *) che un gruppo finito di collineazioni nello spazio, se lascia fermo un punto, lascia fermo anche un piano non passante per il punto, e, se lascia ferma una retta, lascia anche ferma una seconda retta sghemba con la prima.

Considero ora:

α) *I gruppi che lasciano fermo un punto ed uno soltanto.*

β) *I gruppi che lasciano inalterata una retta.*

Fra i gruppi che non lasciano fermi punti o rette considero:

γ) *I gruppi che trasformano in sè una congruenza lineare di rette permutandone gli assi.*

δ) *I gruppi che trasformano in sè un tetraedro facendo subire ai suoi quattro vertici tutte le permutazioni pari.*

Se O è il punto e π è il piano, non passante per O, che un gruppo α) lascia fermi, rappresento un tale gruppo col simbolo generico $[O\pi]$. Un gruppo $[O\pi]$ è, almeno meriedricamente, isomorfo al gruppo piano di trasformazioni lineari che si ha sopra π; ma, giacchè O è per ipotesi il solo punto che $[O\pi]$ lascia fermo, il detto gruppo piano muove qualsivoglia punto di π, e perciò è o un gruppo proprio o un gruppo che permuta transitivamente i vertici di uno stesso triangolo.

Quando l'isomorfismo tra il gruppo $[O\pi]$ ed il gruppo sopra il piano π è meriedrico, all'identità in π corrisponde il gruppo costituito dalle successive potenze di una omologia di centro O e piano π. Se il gruppo di trasformazioni che si ha in π contiene come divisore un gruppo Hessiano Δ_3^3 l'isomorfismo è *sempre meriedrico* ed il gruppo $[O\pi]$ contiene certo una omologia di terzo ordine di centro O.

Nel simbolo $[O\pi]$, quando m'interessa di mettere in evidenza il gruppo di trasformazioni lineari che si ha sopra π, scriverò al posto del segno π il segno che serve a rappresentare il detto gruppo, e scriverò O_ν al posto di O quando voglio mettere in evidenza l'ordine massimo ν delle omologie di centro O.

---

*) *I gruppi di collineazioni del nostro spazio e le rotazioni dello spazio ellittico a cinque dimensioni.* Rend. della R. Accademia delle Scienze di Napoli, fascicolo 7°, Luglio 1901.

Così il simbolo $[O_3 \Gamma_{216}]$ rappresenta un gruppo di grado

$$3 \times 216 = 648$$

che contiene una omologia di terzo ordine col centro in O e che trasforma i punti del suo piano π secondo il gruppo Hessiano principale Γ_{216}.

I gruppi dei tipi:

$$[O \Delta_{\pi}^{3}], \quad [O \Delta_{\pi}^{6}]$$

lasciano inalterato un tetraedro permutandone *intransitivamente* i vertici, e precisamente questi vertici subiscono le permutazioni di un gruppo ciclico di terzo ordine, se si tratta del primo tipo, e le permutazioni di un gruppo diedro di grado 6 se si tratta del secondo tipo.

10. Se r è una retta ed r' è una seconda retta, sghemba con la prima, che un gruppo β) lascia ferme, il gruppo stesso sarà rappresentato genericamente col simbolo $[r\,r']$.

Un tale gruppo è isomorfo, almeno meriedricamente, a ciascuno dei due gruppi di trasformazioni lineari che si hanno sopra le due rette r, r'. Quando mi occorre di mettere in evidenza i detti due gruppi, scriverò invece di r, r' i simboli corrispondenti ai gruppi stessi. Così il simbolo $[R_{12} I]$ rappresenta un gruppo $[r\,r']$ che trasforma i punti di r secondo un gruppo tetraedrico R_{12} mentre lascia singolarmente fermi tutti i punti di r'.

Qui osservo che, non essendo il gruppo R_{12} oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni binarie unimodulari, il quale è invece di grado 24, l'isomorfismo tra R_{12} ed il gruppo $[R_{12} I]$ è necessariamente meriedrico, e questo gruppo contiene certo una omografia *rigata* *) involutoria che ha per assi le rette r, r'. La medesima osservazione vale per tutti i gruppi $[r\,r']$ che ammettono un divisore del tipo $[Q_2^2 I]$ o del tipo $[Q_2^2 Q_2]$.

È bene fare rilevare che un gruppo che è, ad esempio, del tipo $[R_{12} R_{12}]$ non contiene necessariamente come divisore un gruppo del tipo $[R_{12} I]$, perchè alla identità sopra la retta r' corrisponde sopra r un gruppo che è sempre un divisore invariante di R_{12}, e che perciò può essere uno dei gruppi:

$$I, \quad Q_2^2, \quad R_{12}.$$

Dunque si può soltanto conchiudere che un gruppo $[R_{12} R_{12}]$ am-

---

*) Chiamo *rigata* una omografia che ha due rette sghembe di punti uniti; questi sono gli *assi* dell'omografia.

mette necessariamente un divisore di uno dei tre tipi:

$$[I\,I], \qquad [Q_2^2 I], \qquad [R_{12} I].$$

Nel primo di questi casi può benissimo il gruppo $[I\,I]$ essere il gruppo identico, ed allora $[R_{12} R_{12}]$ non contiene alcuna omografia rigata di assi r, r', ed è un gruppo *tetraedrico dello spazio* costituito dell'identità e di omografie rigate i cui assi si appoggiano alle rette r, r'.

In generale siano n, n' i gradi dei gruppi che si hanno sopra le due rette r, r' di un gruppo $[r\,r']$, e si consideri il sottogruppo $[r\,I]$ costituito di tutte le operazioni che producono l'identità sopra la retta r'. Questo sottogruppo trasforma i punti di r secondo un divisore invariante d'indice $\nu \leqq n$ del primitivo gruppo di grado n che si aveva sopra r, di modo che il grado del detto sottogruppo è $\frac{n}{\nu}\,\mu$, essendo μ l'ordine massimo delle omografie rigate di assi r, r' contenute nel gruppo principale $[r\,r']$.

Allora il grado di questo gruppo è:

$$n' \, . \, \frac{n}{\nu} \, . \, \mu = n \, . \, \frac{n'}{\nu} \, . \, \mu,$$

e quindi ν è anche l'indice del sottogruppo invariante che produce l'identità sopra la retta r.

Volendo meglio precisare la natura del gruppo $[r\,r']$ potrò mettere in evidenza i due interi ν, μ ora definiti scrivendo $[r\,r']_\nu^\mu$.

Così il simbolo:

$$[R_{24} R_{24}]_6^4$$

rappresenta un gruppo di grado 384 che contiene una omografia rigata di quarto ordine di assi r, r' e sottogruppi invarianti $[Q_2^2 I]$, $[I\,Q_2^2]$ d'indice 6. Invece il simbolo:

$$[R_{24} R_{24}]_{24}^1$$

rappresenta un gruppo di grado 24 che è un gruppo *ottaedrico dello spazio*, costituito dell'identità e di omografie rigate i cui assi si appoggiano tutti alle due rette r, r'.

I gruppi dei tipi:

$$[Q_n Q_m], \qquad [Q_n^2 Q_m], \qquad [Q_n^2 Q_m^2]$$

lasciano fermo un tetraedro; i vertici di questo tetraedro possono subire, mediante le operazioni di uno di questi gruppi, solamente le permutazioni di un gruppo quadrinomio *intransitivo* o di un suo sottogruppo, perchè i due vertici che stanno sopra r non vanno mai nei due vertici che stanno sopra r'.

Per un gruppo del primo tipo i vertici del tetraedro restano singolarmente fermi, di modo che esso può rappresentarsi in tre maniere come gruppo $[r r']$ scegliendo come rette r, r' le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro. Per questa ragione preferisco di rappresentare un tale gruppo col simbolo Θ_n, essendo n il suo grado.

11. Io passo ora ad esaminare i gruppi γ). Rappresento un tale gruppo col simbolo generico $\{r r'\}$, dato che r ed r' siano gli assi della congruenza lineare di rette che il gruppo trasforma in sè. Intanto, giacchè per ipotesi nessuno punto o retta esiste che siano lasciati fermi da tutte le operazioni di un siffatto gruppo, gli assi della congruenza sono permutati da una, e quindi da metà, delle operazioni che esso contiene. Un gruppo $\{r r'\}$ ammette dunque un sottogruppo invariante d'indice 2 costituito di tutte le operazioni che lasciano ringolarmente fermi gli assi della congruenza, e che perciò è del tipo $[r r']$.

Ma, affinchè un gruppo di questo tipo possa essere un divisore invariante di un $\{r r'\}$, è necessario, se non sufficiente, che i due gruppi di trasformazioni lineari che si hanno sopra le rette r, r' siano simili, perchè le rette stesse sono simili dentro $\{r r'\}$.

Scriverò qualche volta $\{r r'\}^{\mu}_{\nu}$ per significare che il menzionato divisore invariante d'indice 2 è un $[r r']^{\mu}_{\nu}$. Così il simbolo:

$$\{R_{24} R_{24}\}^{4}_{6}$$

rappresenta un gruppo di grado $2 \times 384 = 768$, che contiene come divisore invariante d'indice 2 un gruppo del tipo $[R_{24} R_{24}]^{4}_{6}$ avanti scritto.

I gruppi del tipo:

$$\{Q^2_n Q^2_n\}$$

lasciano inalterato un tetraedro che ha per vertici i poli dei gruppi driedri Q^2_n che si hanno sopra le rette r, r'. Questi vertici sono sempre permutati *transitivamente* dalle operazioni di un siffatto gruppo, e precisamente possono subire tutte le permutazioni di un gruppo diedro di grado 8 o di un suo sottogruppo di grado 4, il quale può essere o ciclico o quadrinomio. In quest'ultimo caso il gruppo lascia ferme almeno tre congruenze che hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro; per questa ragione preferisco di rappresentare un tale gruppo col simbolo Θ^4_n, essendo n il grado del sottogruppo invariante Θ_n, d'indice 4, costituito di tutte le operazioni che lasciano fermo ciascuno dei vertici del tetraedro.

È interessante il gruppo Θ_4^4, di grado 16, che ha come sottogruppo Θ_4 il gruppo quadrinomio formato dalla identità e di tre omografie rigate involutorie sopra le coppie di spigoli opposti del tetraedro. Questo gruppo, che sta a base delle configurazioni desmiche contiene, oltre dell'identità, 15 omografie rigate involutorie due a due permutabili; esso lascia inalterati nello stesso tempo 15 tetraedri, di ciascuno dei quali permuta i vertici secondo il gruppo quadrinomio transitivo, e 15 congruenze, e lascia ancora inalterati 6 complessi lineari e 10 quadriche. Un siffatto gruppo di grado 16 non è, come si verifica subito assumendo uno dei detti tetraedri per tetraedro di riferimento, oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni quaternarie unimodulari. Questo è almeno di grado doppio, perchè la collineazione identica viene necessariamente rappresentata dalle due sostituzioni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

12. Finalmente considero i gruppi δ). Essi, per definizione, trasformano in sè un tetraedro facendo subire ai suoi vertici tutte le permutazioni pari, e può accadere che i detti vertici subiscano soltanto queste permutazioni o anche che siano permutati in tutti i modi possibili dalle operazioni del gruppo.

Nel primo caso rappresento il gruppo col simbolo Θ_n^{12} e nel secondo caso col simbolo Θ_n^{24}, essendo n il grado del sottogruppo invariante che lascia singolarmente fermi i vertici del tetraedro.

Questo sottogruppo invariante Θ_n non può evidentemente scegliersi ad arbitrio fra i gruppi che lasciano fermi i quattro vertici di un tetraedro. Per costruire un Θ_n che sia, ad esempio, sottogruppo invariante d'indice 12 di un Θ_n^{12}, basta considerare un Θ_m a piacere e trasformare poi questo Θ_m con operazioni comunque scelte tali però che facciano subire ai vertici del tetraedro tutte le permutazioni pari; si hanno così 12 gruppi trasformati di Θ_m, in generale diversi, e il gruppo che contiene tutte e sole le operazioni di questi gruppi trasformati soddisfa alla condizione richiesta.

Per esempio, se si parte da un gruppo Θ_5, generato dalle successive potenze di una collineazione del quinto ordine, si ottiene un gruppo Θ_{125} costituito dell'identità e di tutte le possibili collineazioni di quinto ordine che hanno come tetraedro unito il tetraedro che si considera;

così che il gruppo Θ_{125} è sempre lo stesso qualunque sia la collineazione generatrice di Θ_5. E si potrebbe facilmente dimostrare in generale che se si parte da un qualsivoglia gruppo Θ_p, essendo p un numero primo impari, si arriva sempre ad uno stesso gruppo Θ_{p^3} che contiene, oltre all'identità, tutte e sole le collineazioni di ordine p che hanno come tetraedro unito quello che si considera.

Un gruppo del tipo Θ_n^{24} ammette come divisore invariante d'indice 2 un gruppo del tipo Θ_n^{12}; tanto l'uno che l'altro di questi gruppi ammettono poi come divisore invariante un Θ_n^4 appartenente alla categoria dei gruppi γ).

13. Offrono particolare interesse i gruppi Θ_n^{12} e Θ_n^{24} che si hanno in corrispondenza ai valori 4, 8, 16, 32 dell'indice n; io mi limito qui a menzionare solo quelli di siffatti gruppi che contengono omologie.

Esiste un solo tipo di gruppi Θ_4^{24}, di grado $4 \times 24 = 96$, che contiene omologie involutorie. Queste omologie sono in numero di 12 e si ripartiscono in tre quaterne in modo che le omologie di una stessa quaterna hanno come centri e piani i vertici e le corrispondenti facce opposte di uno stesso tetraedro. I tre tetraedri che così si hanno costituiscono una terna *desmica* e sono permutati in tutti i modi da Θ_4^{24}; esiste poi una seconda terna desmica di tetraedri tali che ciascuno di essi è lasciato fermo da tutte le operazioni del gruppo, mentre i suoi vertici subiscono tutte le permutazioni del gruppo simmetrico di 4 cifre.

Il gruppo Θ_4^{24} ha un solo divisore d'indice due Θ_4^{12}, che è un gruppo di grado 48 che non contiene omologie, ed un solo divisore invariante di grado 16 che è il gruppo Θ_4^4 descritto alla fine del n° 11.

Esiste un solo tipo di gruppi Θ_8^{24}, di grado $8 \times 24 = 192$, che contiene omologie involutorie. Questo gruppo possiede, come divisori invarianti, tre gruppi di grado 96 omograficamente ben diversi; uno di questi e il gruppo Θ_4^{24} avanti descritto, un altro è pure rappresentato dal simbolo Θ_4^{24} ma non contiene omologie, ed il terzo è rappresentato dal simbolo Θ_8^{12} e contiene soltanto 4 omologie. Tanto il gruppo principale Θ_8^{24} che il suo divisore ora detto Θ_8^{12} lasciano inalterato un solo tetraedro; il corrispondente sottogruppo invariante Θ_8 è costituito dell'identità, di 4 omologie involutorie, coi centri nei vertici del tetraedro, e di 3 omografie rigate involutorie aventi per assi le coppie di spigoli opposti del tetraedro stesso. Finalmente Θ_8^{24} e Θ_8^{12} ammettono un solo di-

visore invariante Θ_8^4 di grado 32 ed un solo divisore invariante Θ_4^4 di grado 16 che è quello descritto alla fine del n° 11.

Si ha pure un solo gruppo Θ_{16}^{24}, di grado $16 \times 24 = 384$, che contiene omologie involutorie. Esso ha un solo divisore d'indice due rappresentato dal simbolo Θ_{16}^{12} che non contiene omologie. Tanto il gruppo Θ_{16}^{24} che il suo divisore Θ_{16}^{12} posseggono un solo divisore invariante Θ_{16}^4 di grado 64 e due divisori invarianti di grado 16; uno di questi è il gruppo Θ_4^4 più volte menzionato e l'altro è rappresentato dal simbolo Θ_{16}. Quest'ultimo è costituito, oltre della identità, di 3 omografie rigate involutorie, i cui assi sono le coppie di spigoli opposti di un tetraedro, di 12 omografie *assiali* *) di quarto ordine che hanno i poli nelle coppie di vertici del tetraedro stesso.

Il gruppo principale Θ_{16}^{24} contiene 24 omologie e 4 sottogruppi di grado 96, del tipo Θ_4^{24} avanti descritto, che sono permutati transitivamente dalle operazioni del gruppo.

Considero finalmente il gruppo Θ_{32}^{24}, di grado $32 \times 24 = 768$, che contiene 28 omologie involutorie. Questo gruppo ha tre divisori d'indice 2; uno è rappresentato dal simbolo Θ_{32}^{12} e contiene sole 4 omologie, un altro è il gruppo Θ_{16}^{24} avanti descritto e contiene le rimanenti 24 omologie, il terzo è pure rappresentato dal simbolo Θ_{16}^{24} ma non contiene omologie, ed è perciò omograficamente ben diverso dal precedente: questi tre gruppi di grado 384 s'intersecano secondo un gruppo Θ_{16}^{12} di grado 192 che è pure un divisore invariante di Θ_{32}^{24}.

Il gruppo principale Θ_{32}^{24} ha un divisore invariante Θ_{32}^4 di grado 128 che appartiene pure al sottogruppo Θ_{32}^{12}, ed ha un divisore invariante Θ_{16}^4 di grado 64 che appartiene indistintamente ai tre sottogruppi d'indice due del detto gruppo principale. Questo contiene ancora altri sottogruppi invarianti il cui grado è una potenza di 2; essi sono rappresentati dai simboli Θ_4^4, Θ_8^4, Θ_{16}, Θ_{32}. Dei primi tre ho già fatto avanti menzione; in quanto al gruppo Θ_{32}, che contiene tutte le operazioni del gruppo principale che lasciano fermi i singoli vertici del tetraedro corrispondente, esso è costituito, oltre dell'identità, di 3 omografie rigate involutorie, 4 omologie involutorie, 12 omografie assiali di quarto ordine, 6 omografie

---

*) Chiamo *assiale* una omografia che ha una retta di punti uniti e due altri punti uniti isolati posti sopra una seconda retta sghemba con la prima. La retta di punti uniti si dirà *asse* ed i due punti uniti isolati *poli* della omografia.

rigate di quarto ordine e 6 omografie di quarto ordine generali, cioè ad invarianti distinti.

I gruppi delle categorie α), β), γ), δ) considerati in questo paragrafo li dirò gruppi *impropri*; essi hanno in comune questo carattere cioè che esistono di siffatti gruppi di grado così elevato quanto si vuole. Chiamerò invece gruppo *proprio* ogni gruppo finito di collineazioni per cui nessun punto, congruenza o tetraedro esiste che venga trasformato in sè da tutte le operazioni del gruppo.

Lo scopo del presente lavoro è la ricerca di tutti i gruppi *propri* di collineazioni nello spazio che contengono omologie.

§ III. — I gruppi di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie di ordine $\nu > 3$.

14. Sia G un gruppo finito di trasformazioni lineari dello spazio che contenga una omologia di centro O_1 e di ordine $\nu > 3$.

Il gruppo generato dalle potenze di questa omologia lascia ferma ogni retta uscente da O_1, sopra la quale genera un gruppo ciclico di ordine ν che ha come poli il punto O_1 ed il punto dove la retta che si considera taglia il piano dell'omologia.

Siano i punti:

$$O_1, O_2, \ldots, O_j$$

tutti i trasformati, fra loro distinti, del punto O_1 mediante le operazioni di G, così che una qualsivoglia di queste operazioni non può che permutare i punti O.

Se il numero j di questi punti non supera 4, il gruppo G è improprio, perchè allora esiste evidentemente un punto, o una retta, o un tetraedro che G lascia fermo.

Fatta questa osservazione, si supponga prima $\nu > 5$.

Per brevità di linguaggio io denoto con lo stesso nome O sia una omologia sia il centro dell'omologia stessa.

Le due omologie O_1, O_2 generano sopra la retta $r \equiv O_1 O_2$ un gruppo finito di trasformazioni lineari, il quale, giacchè contiene due operazioni di ordine $\nu > 5$, è necessariamente ciclico.

Dunque il punto O_2 sta nel piano di O_1 e reciprocamente.

Segue che tutti i punti O, ad accezione di O_1, stanno sopra il piano di O_1, e basta questo solo fatto per conchiudere che tutti i punti O,

ad eccezione di O_2, stanno sopra il piano di O_2, ... etc. Dunque tutti i punti O diversi da O_1 ed O_2 giacciono sopra la retta r' intersezione dei piani di O_1 ed O_2, e finalmente i punti O diversi da O_1, O_2, O_3 coincidono tutti col punto O_4 dove il piano di O_3 taglia r'.

Perciò, nella ipotesi di $\nu > 5$, i punti O non sono mai in numero maggiore di 4, e G è un gruppo improprio.

15. Si supponga ora $\nu = 4, 5$.

Io scarto d'ora in poi l'ipotesi che tutti i punti O, diversi da O_1 stiano sopra il piano di O_1, perchè in tale caso conchiuderei come prima $j \leqq 4$.

Sia dunque O_2 fuori del piano di O_1.

Allora il gruppo generato da O_1, O_2 sopra la retta $r \equiv O_1 O_2$, giacchè contiene due operazioni di quarto ordine, se $\nu = 4$, o due operazioni di quinto ordine, se $\nu = 5$, sempre con poli distinti, è necessariamente un gruppo ottaedrico R_{24} o un gruppo icosaedrico R_{60}; poi, siccome O_1 ed O_2 lasciano fermi tutti i punti della retta r' dove si tagliano i loro piani, si ha nello spazio un gruppo del tipo $[R_{24} I]$ o del tipo $[R_{60} I]$ che lascia fermo ogni piano passante per la retta r.

Se non esistono altri punti O all'infuori di quelli situati sopra r, il gruppo G non muove questa retta e perciò è improprio; anzi un gruppo del tipo $[rr']$.

Sia dunque O_3 fuori di r e si consideri il piano $\sigma \equiv r\, O_3$ che tagli r' in O'.

Le tre omologie O_1, O_2, O_3 lasciano fermo σ, inoltre le prime due generano su questo piano un gruppo $(O'r)$ che è del tipo $(O' R_{24})$ o del tipo $(O' R_{60})$.

Ma non esiste alcuno gruppo proprio del piano, nè alcuno gruppo improprio di quelli che permutano transitivamente i vertici di uno stesso triangolo, che contenga come sottogruppo un $(O' R_{24})$ od un $(O' R_{60})$; dunque il gruppo piano generato da O_1, O_2, O_3 è improprio ed appartiene necessariamente alla categoria dei gruppi che lasciano fermo un punto. E siccome O' è l'unico punto del piano σ che il sottogruppo $(O'r)$ generato da O_1 ed O_2 lascia fermo, il centro O_3, che per ipotesi è fuori di r, deve coincidere con O', ed appartiene perciò alla retta r'.

Segue che tutti i punti O che non stanno sopra r stanno sopra r', e giacchè r contiene più di due di tali punti, si conchiude che ogni

operazione di G che muove r scambia necessariamente r con r', e quindi G è un gruppo improprio del tipo $\{r r'\}$.

La conchiusione di questo paragrafo è che:

Tutti i gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio, che contengono omologie di ordine maggiore di 3, sono impropri.

Io debbo ora passare alla ricerca dei gruppi G che contengono omologie del *terzo* ordine. Conservando le stesse notazioni, si supponga che i punti O siano centri di siffatte omologie e che O_2 non giaccia nel piano di O_1.

Allora il gruppo generato dalle due omologie di terzo ordine O_1, O_2 produce sopra la retta $r \equiv O_1 O_2$ un gruppo finito di trasformazioni lineari, il quale, giacchè contiene due operazioni del terzo ordine con poli distinti, può essere un gruppo tetraedrico R_{12} oppure un gruppo icosaedrico R_{60}, ed il gruppo G contiene un sottogruppo del tipo $[R_{12} I]$ o del tipo $[R_{60} I]$. Questa seconda ipotesi è da scartarsi, perchè allora, ragionando come precedentemente, si conchiude che tutti i punti O che non stanno sopra r stanno sopra r', e quindi che G è un gruppo improprio.

Resta dunque ad esaminare l'ipotesi che il gruppo generato da O_1, O_2 sia un $[R_{12} I]$; questo esame è ciò che vado a fare nel paragrafo che segue.

§ IV. — I gruppi proprii che contengono omologie del terzo ordine.

16. Si è visto ultimamente che, se esiste un gruppo proprio G che contiene omologie del terzo ordine, esso contiene certo come divisore un gruppo $[R_{12} I]$ generato da due siffatte omologie.

Il gruppo $[R_{12} I]$ è (n° 10) di grado 24 e le sue operazioni diverse dalla identica sono: 8 omologie di terzo ordine, 8 omografie assiali di sesto ordine ma che producono operazioni di terzo ordine sopra la retta r, 6 omografie assiali di quarto ordine che producono operazioni di secondo ordine sopra r, e finalmente una omografia rigata involutoria che ha per assi le rette r, r'.

Io scarto l'ipotesi che tutti i punti O siano distribuiti su queste due rette, perchè allora G è improprio.

Sia dunque O_3 non situato nè sopra r nè sopra r', così che il piano

di O_1 non passa (n° 9) nè per r' nè per r, e sia P il punto dove il piano $\sigma \equiv r\, O_3$ taglia r'.

Sopra il piano σ si ha un gruppo del tipo (PR_{12}), e questo lascia fermo soltanto il punto P e non è contenuto come sottogruppo in nessun gruppo improprio di quelli che permutano transitivamente i vertici di un triangolo, cioè dei tipi Δ^3_6, Δ^6_6; d'altra parte l'omologia O_3, che lascia pure fermo σ, muove r e quindi P; dunque il gruppo generato da O_1, O_2, O_3 sopra il piano σ è necessariamente proprio.

Ma fra i gruppi proprî del piano uno solo ne esiste che contiene omologie del terzo ordine, ed è il gruppo Γ_{216} di Jordan; dunque con questo deve coincidere il gruppo generato da O_1, O_2, O_3 sul piano σ.

Inoltre, siccome i sottogruppi del tipo (PR_{12}) contenuti in Γ_{216} sono gruppi $(P_2 R_{12})$ di grado 24, segue che il gruppo principale G dello spazio non contiene sottogruppi $(R_{12} I)$ che siano di grado maggiore di 24, altrimenti si avrebbe sopra gli assi r, r' una omografia rigata di ordine maggiore di 2 e sopra un piano come σ un gruppo $(P_\nu\, R_{12})$ con $\nu > 2$. Dunque sopra r stanno 4, e non più, punti O.

Il gruppo dello spazio generato da O_1, O_2, O_3 è del tipo $[O'\,\Gamma_{216}]$, essendo O' il punto dove il piano di O_1 taglia r'; inoltre, siccome Γ_{216} non è oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni ternarie unimodulari (n° 5) si ha in O' il centro di una omologia di terzo ordine.

Dunque G contiene un gruppo $(O'_3\, \Gamma_{216})$ di $3 \times 216 = 648$ operazioni che lasciano tutte fermo il punto O', e, se G è un gruppo proprio, non può O', dentro G, rimanere fermo per un numero maggiore di operazioni, perchè in tale caso, non essendo Γ_{216} contenuto in nessun gruppo piano di grado maggiore, deve aumentare l'ordine dell'omologia di centro O', il che è da escludersi.

17. Ciò posto, sempre nell'ipotesi che G sia un gruppo proprio, esiste certamente un'operazione che muove O' e quindi σ, e siccome dei 12 punti O che si trovano in questo piano non più di 4 sono in linea retta, esiste un punto O, e sia O_4, diverso di O' e fuori di σ.

Allora l'omologia O_4, insieme a quella di centro O', genera un gruppo $[R_{12} I]$ che trasforma i punti della retta $s \equiv O'\,O_4$ secondo le operazioni di un gruppo tetraedrico e lascia singolarmente fermi i punti di una retta s' giacente in σ. E siccome il detto gruppo $[R_{12} I]$ contiene

una omografia rigata involutoria che ha per assi s, s', conchiudo che il punto P' dove s taglia σ è uno dei centri delle operazioni di secondo ordine di Γ_{216} ed è, dentro Γ_{216} simile al punto P avanti definito.

Ma di punti come P se ne hanno in σ soltanto nove, e quindi si hanno nove, e non più, rette come s uscenti da O'. Sopra ognuna di queste rette stanno 4 centri di omologie di terzo ordine simili ad O' e ad O_4, sicchè O' è ancora esso uno dei punti O; questi quattro centri sono tutti fuori di σ ma soltanto 3 sono diversi di O'. Si hanno quindi $3 \times 9 = 27$ punti O diversi di O' e fuori di σ; bisogna ancora contare i 12 punti O che stanno sopra σ ed il punto O' stesso, di modo che il numero totale dei punti O è 40.

Intanto ognuno di tali punti, come ho già osservato a proposito del punto O', è lasciato fermo da 648, e non più, operazioni di G; quindi G è un gruppo di grado $648 \times 40 = 25920$.

D'altra parte è noto che aggiungendo ad un gruppo come $[O'; \Gamma_{216}]$ una omologia di terzo ordine come O_4, cioè tale che, insieme ad O', generi sopra la retta $O' O_4 = O' P = r'$ un gruppo tetraedrico, si ha subito il gruppo semplice di 25920 collineazioni che dietro le indicazioni di KLEIN fu studiato da WITTING, e poi da MASCHKE, e BURKHARDT *), e perciò con questo coincide necessariamente il gruppo G.

Dunque:

Esiste un solo gruppo proprio di trasformazioni lineari dello spazio che contiene omologie del terzo ordine, ed è un gruppo semplice di 25920 collineazioni.

Questo gruppo, come si sa, non contiene omologie involutorie, così che nessun gruppo proprio dello spazio esiste che contenga nello stesso tempo omologie di terzo e secondo ordine.

18. Il gruppo di 25920 collineazioni di cui si tratta contiene sottogruppi di grado 16 che sono del tipo Θ_4^4 descritto alla fine del n° 11. e, come si è là osservato, un siffatto gruppo di grado 16 non è oloedricamente isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni quaternarie unimodulari.

Dunque il gruppo principale non può essere oloedricamente isomorfo

*) A. WITTING, Inaugural-Dissertation, Dresden 1887. G. MASCHKE, Mathematische Annalen, v. XXXIII (1889). H. BURKHARDT, Mathematische Annalen, v. XLI (1892).

ad un gruppo di sostituzioni quaternarie unimodulari; esso è, come d'altronde è noto, meriedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni di grado doppio.

È facile scrivere le operazioni generatrici di questo gruppo di sostituzioni.

Si prenda come tetraedro Θ di riferimento uno dei tetraedri che è sostegno di un gruppo Θ_{27}^{24}, di grado 648, contenuto nel gruppo principale. Denotando con ε una radice immaginaria cubica dell'unità le due sostituzioni:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = \varepsilon x_2 \\ x'_3 = \varepsilon x_3 \\ x'_4 = \varepsilon x_4 \end{array}\right| , \qquad \begin{array}{l} x'_1 = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(\varepsilon x_1 + x_2 + x_3) \\ x'_2 = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(x_1 + \varepsilon x_2 + x_3) \\ x'_3 = \dfrac{i}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + \varepsilon x_3) \\ x'_4 = \varepsilon x_4 \end{array}$$

rappresentano la prima una omologia del terzo ordine e la seconda una omografia rigata di terzo ordine ma che produce una omologia nel piano $x_4 = 0$. Queste omografie generano nel piano ora detto il gruppo Γ_{216} e nello spazio il gruppo $[O'_3 \Gamma_{216}]$, di grado 648, *oloedricamente* isomorfo al corrispondente gruppo di sostituzioni.

Il gruppo Δ_3^6 contenuto in Γ_{216} permuta in tutti i modi i vertici di Θ situati nel piano $x_4 = 0$ e lascia fermo il rimanente vertice O'; perciò, se aggiungo alle (1) l'operazione involutoria:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = x_3 \end{array}\right.$$

la quale scambia O' con un altro vertice di Θ e lascia fermi i rimanenti due, è chiaro che i vertici di Θ subiscono tutte le permutazioni possibili e quindi, nel gruppo generato da (1) e (2), il tetraedro Θ è sostegno di un gruppo Θ_{27}^{24}.

Le collineazioni rappresentate da (1) e (2) bastano a generare tutto il gruppo principale di grado 25920.

Questo gruppo, come si sa, permuta in modo speciale 27 complessi lineari, precisamente nel modo come il gruppo di Galois, relativo all'e-

quazione da cui dipende la ricerca delle 27 rette di una superficie generale del terzo ordine, permuta le radici dell'equazione stessa.

Ciascuno dei 27 complessi ora detti è trasformato in sè da un gruppo di grado 960; questi gruppi sono i divisori di massimo grado contenuti nel gruppo principale.

§ V. — Gruppi proprii G che contengono omologie involutorie.

19. Prima di passare alla ricerca dei gruppi finiti di trasformazione lineari dello spazio che contengono *omologie involutorie* è bene premettere alcune osservazioni che servono a restringere il campo delle ipotesi.

Anzitutto osservo che il gruppo generato da tutte le omologie involutorie di G, simili o no dentro G, i cui centri cadono sopra una stessa retta r, produce su questa retta un gruppo ciclico o diedro.

Infatti, in caso contrario, giacchè le operazioni di secondo ordine di un gruppo tetraedrico R_{12} non possono generare il gruppo stesso, si ha sopra r un gruppo ottaedrico od icosaedrico generato da omologie involutorie, e nello spazio un gruppo del tipo $[R_{24} I]$ o del tipo $[R_{60} I]$. Allora si consideri il piano σ passante per r e per uno dei centri di omologie posti fuori di r, i quali centri necessariamente esistono quando G è un gruppo proprio. Questo centro coincide col punto O' dove σ taglia la retta r', cioè la retta per cui passano i piani delle omologie che hanno i centri posti sopra r. Per rendersi ragione di ciò basta ripetere l'osservazione fatta nel n° 15, cioè che un gruppo piano del tipo $(O' R_{24})$ o del tipo $(O' R_{60})$ è contenuto come sottogruppo soltanto in gruppi degli stessi tipi.

Dunque i centri di tutte le omologie contenute nel gruppo principale G sono distribuiti sopra le due rette r, r', e perciò G è un gruppo improprio, contrariamente al supposto.

Nell'ipotesi dunque che sopra r cadano più di due centri di omologie, sia $[Q_n^2 I]$ il gruppo che contiene tutte queste omologie. Se P', P'' sono i poli del gruppo ciclico Q_n che si ha sopra r, esiste nel gruppo $[Q_n^2 I]$ una operazione che scambia P' con P'', inoltre tutte le operazioni di questo gruppo lasciano singolarmente fermi i punti di r' e generano sopra un piano qualsivoglia passante per r un gruppo $(P Q_n^2)$, essendo P il punto dove il piano ora detto taglia r'.

Io mi propongo di dimostrare che, nella ipotesi che G sia un gruppo proprio, non può essere $n > 5$.

Mi fondo sopra la seguente osservazione che è del resto assai semplice.

Se in un piano si ha un gruppo improprio che soddisfi alle due condizioni:

a) che trasformi in sè un solo triangolo,

b) che non sia contenuto come sottogruppo in un gruppo proprio del piano,

allora, se nel detto piano cade il centro di una omologia involutoria, questo centro deve necessariamente cadere sopra uno dei lati del triangolo.

Infatti un tale gruppo appartiene ad uno dei tipi:

$$(PQ_n),\qquad (PQ_n^2),\qquad \Delta_n^3,\qquad \Delta_n^6,$$

e giacchè, per la condizione *b*), non può estendersi in un gruppo proprio del piano, si estenderà in un gruppo appartenente agli stessi tipi oppure ad uno dei tipi:

$$(PR_{12}),\qquad (PR_{24}),\qquad (PR_{60}).$$

Nella prima ipotesi, il triangolo che il gruppo esteso lascia fermo, coincide necessariamente con l'unico triangolo lasciato fermo dal preesistente sottogruppo, così che la detta omologia, dovendo trasformare in sè questo triangolo, avrà il centro sopra uno dei suoi lati.

Nella seconda ipotesi, il punto e la retta che il gruppo esteso lascia fermi, sono anche lasciati fermi dal detto sottogruppo, e giacchè questo soddisfa alla condizione *a*), il punto e la retta in discorso sono un vertice ed il lato opposto del triangolo corrispondente al sottogruppo stesso; così che il centro dell'omologia che ha generato il gruppo esteso cade nel detto vertice o sopra il detto lato.

20. Ciò posto, nella ipotesi di $n > 5$, il gruppo (PQ_n^2) che si ha sopra un piano σ passante per r soddisfa alle condizioni *a*) e *b*), e quindi ogni centro di omologia che cade in σ cade sopra uno dei lati del triangolo $PP'P''$.

Dunque tutti i centri delle omologie di G che non cadono sopra la retta $r \equiv P'P''$ cadono sopra una retta come PP' o come PP'', cioè sopra l'uno o l'altro dei due piani $r'P'$, $r'P''$.

E giacchè non possono tutti i centri ora detti essere distribuiti sopra le due rette r, r' senza che G sia improprio, io suppongo che uno di tali centri O cada, ad esempio, sopra la retta PP' in posizione diversa di P e di P'. Allora l'omologia O scambia P con P' e lascia fermo il punto P'' ed anche il punto P''' dove il suo piano taglia r.

I quattro vertici del tetraedro $\Theta \equiv PP'P''P'''$, ammettendo la trasposizione (P, P') ed anche, come ho già osservato avanti, la trasposizione (P', P''), ammettono anche la permutazione ciclica di terzo ordine (P, P', P''), così che le tre facce di Θ che escono da P''' sono simili e sopra ciascuna di esse si trova un gruppo del tipo $(P'''\, Q_n^2)$. Dunque, tutti i centri delle omologie di G che non stanno sopra lo spigolo r, dovendo appartenere alle due facce che passano per r', stanno sopra gli spigoli di Θ, e cosi tutti i centri delle omologie di G, senza eccezione, stanno sopra i detti spigoli.

Se tutti i centri ora detti stanno sopra la faccia $\sigma \equiv PP'P''$, tranne, forse, uno solo coincidente con P''', il gruppo G non muove σ e P''' e quindi è improprio.

Sia dunque O' un tale centro posto, ad esempio, sopra lo spigolo $r' \equiv P'''P$ in posizione diversa di P e di P'''. L'omologia O', dovendo lasciare inalterati i due triangoli che stanno sopra le due facce che passano per r', scambia P con P''' e lascia fermi i vertici P', P''. Allora i vertici di Θ, ammettendo la permutazione ciclica (P, P', P'') e la trasposizione (P, P'''), subiscono tutte le permutazioni del gruppo simmetrico di 4 cifre. Dunque il gruppo di grado minimo che contiene tutte le omologie di G è un gruppo del tipo Θ_m^{24}, essendo m un multiplo di n, ed evidentemente Θ è il solo tetraedro che questo gruppo lascia inalterato.

Siccome ogni operazione di G permuta soltanto le dette omologie fra loro, essa deve lasciare inalterato Θ, e quindi G è un gruppo improprio.

21. Io debbo perciò esaminare solamente le ipotesi $n = 2, 3, 4, 5$.

Per $n = 4, 5$ la condizione $a)$ è verificata ed è anche verificata la condizione $b)$ quando si ha una omografia rigata avente per assi le rette r, r'; perchè allora, in un piano σ, si ha un gruppo $(P_\nu\, Q_4^2)$ o un gruppo $(P_\nu\, Q_5^2)$ con $\nu \geqq 2$, e nessuno di questi gruppi è contenuto come sottogruppo in un gruppo proprio del piano.

Intanto, un gruppo $[Q_4^2 I]$, giacchè contiene divisori del tipo $[Q_2^2 I]$, contiene certamente (n° 10) una omografia rigata involutoria che ha per assi r, r', e quindi l'ipotesi di $n = 4$ è da scartarsi.

Per $n = 5$ bisogna soltanto ritenere i gruppi $[Q_5^2 I] = G_{10}$ che siano di grado 10, perchè i gruppi diedri $(P\, Q_5^2)$ di grado 10 che si hanno allora sopra ogni piano σ, sono contenuti come sottogruppi nel gruppo icosaedrico Γ_{60} del piano e nel gruppo di VALENTINER Γ_{360}.

Il gruppo G_{10} è generato da due omologie involutorie o anche da una omografia assiale di quinto ordine e da una omologia involutoria; sopra la retta r stanno soltanto cinque centri di omologie che sono simili fra loro dentro G_{10}.

Qui è importante notare che si hanno due sorta di omografie assiali di quinto ordine secondo che le sostituzioni quaternarie unimodulari che le rappresentano hanno gli invarianti

$$1, \quad 1, \quad \theta, \quad \theta^4$$

oppure gli invarianti:

$$\theta, \quad \theta, \quad 1, \quad \theta^3,$$

essendo θ una radice primitiva quinta dell'unità.

Quelle che entrano in G_{10} sono della prima sorta, perchè una omografia assiale della seconda sorta non è cambiata nella sua inversa da una operazione che ne scambia i poli, e quindi non può generare un gruppo driedro.

Io esamino ora l'ipotesi di $n = 3$. Se esiste una omografia rigata sopra gli assi r, r', nel piano σ si ha un gruppo $(P_\nu Q_3^2)$ con $\nu \geq 2$, e sono allora soddisfatte entrambe le condizioni a), b).

Dunque, per $n = 3$ bisogna ritenere soltanto i gruppi $[Q_3^2 I] = G_6$ di grado 6, giacchè per questi, i corrispondenti gruppi diedri $(P Q_3^2)$ sopra i piani σ, non soddisfano a nessuna delle condizioni a), b).

Il gruppo G_6 può essere generato da due omologie involutorie, oppure da una omografia assiale del terzo ordine e da una omologia involutoria; sopra la retta r stanno soltanto tre centri di omologie che sono simili fra loro dentro G_6.

22. Considero finalmente il caso di $n = 2$. In questo caso si ha un gruppo $[Q_2^2 I]$ che contiene necessariamente una omografia rigata involutoria sopra gli assi r, r'; ma che può, in generale, contenere una omografia rigata d'ordine pari ν sopra questi assi.

Se $\nu = 2$ si ha un gruppo $[Q_2^2 I] = G_8$ di grado 8; esso è costituito, oltre dell'identità, di 4 omologie involutorie i cui centri sono situati sopra r, di due omografie assiali di quarto ordine i cui poli sono pure situati sopra r, e di una omografia rigata involutoria avente per assi le rette r, r'. Il gruppo G_8 può essere generato da due omologie involutorie o anche da una omografia assiale di quarto ordine ed una omologia involutoria. Le 4 omologie di G_8 possono risultare simili

dentro il gruppo principale G ma non lo sono dentro il sottogruppo G_8; rispetto a questo esse si scindono in due coppie intransitive, ciascuna costituita di due omologie tali che il centro dell'una sta nel piano dell'altra. I poli delle omografie assiali di quarto ordine, come pure i due centri di omologie di una medesima coppia sono simili dentro G_8.

Se $\nu = 4$ si ha un gruppo $[Q_2^2 I] = G_{16}$ di grado 16; esso è costituito dell'identità, di 6 omologie involutorie, di 6 omografie assiali di quarto ordine, di 2 omografie rigate di quarto ordine sopra gli assi r, r' ed una omografia rigata involutoria sopra gli stessi assi. Il gruppo G_{16} può essere generato da tre omologie involutorie o da due di siffatte omologie ed una omografia rigata di quarto ordine; sopra la retta r stanno i centri delle 6 omologie, che sono anche i poli delle 6 omografie assiali di quarto ordine.

Questi 6 centri si distribuiscono, rispetto a G_{16}, in tre coppie intransitive tali che i due centri appartenenti ad una stessa coppia sono scambiati fra loro dalle operazioni di G_{16}.

Faccio qui un'osservazione analoga a quella del n° 21, cioè che esistono due sorta di omografie assiali di quarto ordine, omograficamente distinte, secondo che gli invarianti delle sostituzioni quaternarie che le rappresentano sono:

$$1, \quad 1, \quad i, \quad -i$$

oppure:

$$\eta, \quad \eta, \quad -\eta, \quad i\eta$$

essendo η, una radice primitiva sedicesima dell'unità. Quelle che entrano nei gruppi G_8, G_{16}, giacchè producono operazioni di secondo ordine sopra la retta che ne congiunge i poli, sono della prima sorta.

23. Se $\nu = 6$ il gruppo $[Q_2^2 I]$ risulta di grado 24 e contiene omografie rigate del sesto ordine, ma allora è facile dimostrare che il gruppo principale G è necessariamente improprio.

Infatti, più generalmente, siano r, r' gli assi di una omografia rigata S di ordine $\nu > 5$ contenuta in G. Se tutte le operazioni di G trasformano in sè la coppia di rette r, r' il gruppo G è improprio. Si supponga dunque che una qualche operazione di G porti la detta coppia in un'altra r_1, r'_1, e si consideri l'omografia rigata S', trasformata di S, che ha per assi questa nuova coppia di rette.

Non è possibile che le quattro rette r, r'; r_1, r_1' siano sghembe a due a due, perchè allora, sopra ogni retta che le tagli tutte, e che per

conseguenza è lasciata ferma da S ed S', si avrebbe un gruppo finito di trasformazioni lineari contenente due operazioni di ordine $\nu > 5$ con poli distinti.

E nemmeno può la retta r coincidere ad esempio con r_1, perchè allora il gruppo generato da S ed S' lascia ferma la retta $\nu \equiv r_1$ e quindi deve lasciare ferma (n° 9) una seconda retta sghemba con r ed r_1, e ciò è impossibile a meno che non sia $r' \equiv r'_1$.

Si supponga dunque che r_1 tagli ad esempio r in un punto. Il gruppo generato da S ed S' lascia fermo questo punto e perciò lascia anche fermo un piano non passante per esso; questo piano deve allora passare per le due rette r', r'_1 le quali quindi si tagliano pure in un punto. Poi, giacchè sopra la retta intersezione dei due piani rr_1 ed $r'r'_1$, che è anche lasciata ferma da S ed S', non può esistere un gruppo finito di trasformazioni lineari contenente due operazioni di ordine $\nu > 5$ con poli diversi, deve r tagliare r'_1 ed r' tagliare r_1.

Dunque le due coppie di rette r, r'; r_1, r'_1 sono due coppie di spigoli opposti di un tetraedro. Dunque se r_2, r'_2 è una terza coppia di rette che sia una trasformata delle prime due mediante operazioni di G, questa, dovendo appoggiarsi in modo analogo alle prime due coppie, costituirà la terza coppia di spigoli opposti dello stesso tetraedro.

Così che tutte le operazioni di G permutano semplicemente i vertici di un tetraedro e quindi G è un gruppo improprio.

I gruppi:

$$G_6, \quad G_8, \quad G_{10}, \quad G_{16}$$

trovati in questo paragrafo li dirò *sottogruppi caratteristici* del gruppo principale G; essi, come in seguito si vedrà, non sono contenuti contemporaneamente in uno stesso gruppo proprio G, ma esistono gruppi proprii G che contengono uno o più sottogruppi caratteristici di ogni tipo. Un sottogruppo caratteristico contiene tutte le omologie del gruppo principale i cui centri cadono sopra la corrispondente retta r che chiamerò *sostegno* del gruppo caratteristico stesso.

§ VI. — Gruppi G che contengono sottogruppi caratteristici G_{16}.

24. Siano:

$$(A', A''), \quad (B', B''), \quad (C', C'')$$

le tre coppie di omologie del gruppo G_{16} i cui sei centri sono situati sopra il suo sostegno r. In un piano σ passante per r, che tagli r' in

un punto A, si ha un gruppo $(A_4\, Q_2^2)$, che contiene una omologia *piana* di quarto ordine di centro A ed asse r, prodotta da una omografia rigata di quarto ordine di G_{16}. Questo gruppo piano soddisfa alla condizione b) del n° 19 ma non soddisfa alla condizione a), perchè esso lascia fermi tre triangoli ciascuno dei quali ha un vertice in A ed i rimanenti due vertice sono una delle tre coppie di punti che si hanno sopra r.

Il gruppo $(A_4\, Q_2^2)$ può dunque estendersi soltanto in un gruppo piano improprio, il quale, se muove A, deve necessariamente trasformare in sè uno dei detti tre triangoli.

Sia ora O il centro di una omologia di G posto fuori di r e di r' e si consideri il piano $\sigma \equiv r\, O$. L'omologia O lascia fermo questo piano e muove il punto A; quindi estende il gruppo $(A_4\, Q_2^2)$ in un gruppo che lascia fermo uno dei menzionati triangoli, ad esempio $A\,A'\,A''$.

Allora O cade, tanto per fissare le idee, sopra il lato $A\,A'$ in posizione diversa di A e di A', e l'omologia O scambia questi due vertici, lasciando fermo il terzo vertice A'' ed anche il punto A''' dove il suo piano taglia r'.

I vertici del tetraedro $\Theta = A\,A'\,A''\,A'''$, ammettendo le due trasposizioni (A, A') ed (A', A''), ammettono anche la permutazione ciclica del terzo ordine (A, A', A''), e quindi le tre coppie di spigoli opposti di Θ sono, come r ed r', assi di omografie rigate di quarto ordine.

Allora, come è facile vedere assumendo Θ per tetraedro di riferimento di un sistema di coordinate, si ha un gruppo Θ_{32}, generato dalle dette omografie, che lascia singolarmente fermi i vertici del detto tetraedro; esso è il gruppo specificato alla fine del n° 13.

Il gruppo Θ_{32}, che si comporta egualmente rispetto alle facce di Θ, produce sopra una di queste facce, ad esempio sopra σ, un gruppo piano $\Delta_{16} \equiv (A_4\, Q_4)$, e quindi il gruppo generato dalle operazioni di G_{16} e dalla omologia O è un gruppo $[A_2'''\,\Delta_{16}^6]$, di grado $2 \times 6 \times 16 = 192$, le cui operazioni sono tutte permutabili con l'omologia involutoria di centro A''' e piano σ. E, se G è un gruppo proprio, non può l'omologia A''' essere permutabile con un maggior numero di operazioni, perchè allora o aumenta l'ordine della omologia in A''', il che è da escludersi, o aumenta il grado del gruppo che si ha sul piano σ; ma in quest'ultimo caso si avrebbe sopra uno, e perciò sopra tutti, i lati del triangolo $AA'A''$ un gruppo di grado maggiore di Q_4^2 e quindi un numero di omologie involutorie maggiore di quanto segna il gruppo caratteristico G_{16}.

Siccome sopra tutte le facce di Θ si hanno ora gruppi piani che soddisfano alle condizioni a) e b) del n° 19 non può il centro di una omologia di G cadere sopra una di queste facce senza cadere sopra uno spigolo di Θ. Ma non possono tutti i centri delle omologie contenute in G cadere sopra gli spigoli di Θ, perchè allora, ragionando come nel n° 20, conchiuderei che G lascia inalterato Θ e che perciò è un gruppo improprio. Esiste dunque un punto O', centro di una omologia di G, posto fuori di ogni spigolo, e perciò di ogni faccia, di Θ.

Il piano $\sigma' = r\,O'$ taglia r' in un punto B, diverso da A ed A'', e il punto O' è per ipotesi fuori delle due rette BA', BA'' giacenti sopra le facce di Θ che passano per r'; dunque O' cade ad esempio sopra la retta BB' e l'omologia di centro O' trasforma in sè il triangolo $B\,B'\,B''$. Allora, se B''' è il punto dove la retta r' è tagliata dal piano di O', si conchiude l'esistenza di un secondo tetraedro $\Theta' = BB'B''B'''$ analogo a Θ.

L'omologia involutoria che ha il centro in B, dovendo lasciare inalterati i due triangoli che si hanno sopra le facce di Θ che passano per r', produce sopra i vertici di Θ la trasposizione (A, A'''), così che questi vertici subiscono tutte le permutazioni possibili, e perciò r' è sostegno, come r, di un gruppo caratteristico G'_{16} simile a G_{16}.

Le tre coppie di omologie di G'_{16} sono A, A''' ; B, B''' ed una terza che denoto con C, C'''. Sopra le rette r, r' si appoggiano due diverse coppie di assi di omografie rigate di quarto ordine, una formata di due spigoli opposti di Θ e l'altra di due spigoli opposti di Θ'; si ha perciò un gruppo ottaedrico dello spazio che è del tipo $[R_{24}\,R_{24}]^1_{24}$, e questo contiene omografie rigate di terzo ordine i cui assi si appoggiano pure ad r, r'. Una di siffatte omografie di terzo ordine permuta circolarmente e nello stesso tempo le tre coppie di centri di omologie involutorie che si hanno sopra r e quelli che si hanno sopra r', così che il tetraedro Θ va in Θ' e poi in un terzo tetraedro $\Theta'' \equiv C\,C'\,C''\,C'''$.

25. Siccome sopra r' si trovano sei, e non più, centri di omologie, tutte le omologie contenute nel gruppo principale G hanno i centri distribuiti sopra sei piani che sono, ad esempio, quelli che projettano da r i sei centri di r'; infatti si è visto che ognuno di tali centri O, che non sta nè sopra r nè sopra r', appartiene ad un piano come σ che è uno dei sei menzionati piani.

I quindici centri che si hanno, ad esempio sopra σ, a causa della

presenza del gruppo Δ_{16}^{6} nel piano ora detto, sono simili alle omologie di G_{16} le quali sono poi simili fra loro, potendosi le tre coppie di omologie di G_{16} portare una nell'altra mediante una omografia rigata di terzo ordine del gruppo principale G.

Tutte le omologie contenute in G sono dunque simili dentro il gruppo stesso; di queste se ne hanno 9 i cui centri stanno in un piano come σ e fuori di r. Si hanno perciò $9 \times 6 = 54$ omologie i cui centri sono fuori di r; a queste bisogna aggiungere le 6 omologie che hanno i centri sopra r, e quindi il numero totale delle omologie contenute in G è 60.

Siccome ognuna di queste omologie è permutabile, come si è visto a proposito dell'omologia di centro A''', con un sottogruppo di 192 collineazioni, il grado del gruppo principale G è $192 \times 60 = 11520$.

Ciò posto, assumendo Θ come tetraedro di riferimento, io scrivo le equazioni di tre omografie rigate di quarto ordine aventi per rispettivi assi le tre coppie di spigoli opposti di Θ; esse sono:

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1' = -\eta x_1 \\ x_2' = -\eta x_2 \\ x_3' = \eta^3 x_3 \\ x_4' = \eta^3 x_4 \end{array}\right| ; \quad \begin{array}{l} x_1' = -\eta x_1 \\ x_2' = \eta^3 x_2 \\ x_3' = -\eta x_3 \\ x_4' = \eta^3 x_4 \end{array}\Bigg| ; \quad \begin{array}{l} x_1' = -\eta x_1 \\ x_2' = \eta^3 x_2 \\ x_3' = \eta^3 x_3 \\ x_4' = -\eta x_4 \end{array}\Bigg| ;$$

dove η è una radice primitiva ottava dell'unità. Queste omografie generano, come ho detto avanti, il gruppo Θ_{32}.

Trasformando G con una conveniente collineazione che lasci fermi i vertici di Θ, posso supporre che i punti B', B''; B, B''', che sono i vertici di Θ', abbiano ordinatamente le coordinate:

$$(1, 1, 0, 0), \ (1, -1, 0, 0);$$
$$(0, 0, 1, 1), \ (0, 0, 1, -1);$$

allora una omografia rigata di quarto ordine sopra gli assi $B' B$, $B'' B'''$ si scrive:

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + i x_2) \\ x_2' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\ i x_1 - x_2) \\ x_3' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_3 + i x_4) \\ x_4' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\ i x_3 - x_4). \end{aligned}\right.$$

Le collineazioni rappresentate da (1) e (2) lasciano ferme le rette:

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 = x_4 = 0$$

e generano un gruppo:

$$[R_{24} R_{24}]^{4}_{16}$$

di grado 384.

Si aggiunga ancora l'omologia involutoria O che scambia A' con A lasciando fermi i vertici A'', A'''.

Trasformando il gruppo G con una conveniente omografia rigata avente per assi le menzionate due rette, posso supporre che il centro O di questa omologia abbia le coordinate:

$$(1,\ 0,\ -1,\ 0),$$

ed allora essa si scrive:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= \eta\, x_3 \\ x'_2 &= \eta\, x_2 \\ x'_3 &= \eta\, x_1 \\ x'_4 &= \eta\, x'_4. \end{aligned} \right.$$

Dunque il gruppo G, o un suo trasformato, contiene le collineazioni (1), (2) e (3); ma questi generano il noto gruppo di grado 11520, scoperto da KLEIN *) e studiato da W. REICHARDT **); quindi:

Esiste un solo gruppo proprio di trasformazioni lineari dello spazio per cui vi sono rette che contengono ciascuna 6 centri di omologie involutorie, esso è il noto gruppo di 11520 *collineazioni.*

26. Questo gruppo, che è il gruppo principale delle configurazioni desmiche, possiede un divisore invariante di grado 16 del tipo Θ^{4}_{4} descritto nel n° 11.

Per generare questo divisore basta aggiungere al gruppo di grado 8 generato dai quadrati delle omografie rigate di quarto ordine (1) e (2), l'omografia rigata involutoria che si ottiene trasformando il quadrato di (2) con l'omologia (3).

Ciascuno dei 15 tetraedri Θ che il divisore invariante Θ^{4}_{4} lascia inalterati è, dentro il gruppo principale, trasformato in sè da un sottogruppo Θ^{24}_{32} di grado 768, e ciascuna delle 15 congruenze che Θ^{4}_{4} lascia ferme,

*) *Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen,* Mathematische Annalen, v. IV (1871).

**) *Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen,* Nova Acta der k. Leop.-Carol. deutschen Ak., v. L (1887).

come ad esempio quella che ha per assi le rette r, r', è, dentro il gruppo principale trasformata in sè da un sottogruppo $[R_{24}\, R_{24}]_6^4$ pure di grado 768.

Il detto gruppo principale fa subire ai 6 complessi lineari lasciati fermi da Θ_4^4 tutte le permutazioni del gruppo simmetrico di 6 cifre, così che ciascuno di questi complessi lineari viene trasformato in sè da un sottogruppo di grado 1920.

Ma non sono soltanto questi i divisori di grado 1920 che il gruppo principale contiene: si hanno anche 6 divisori del grado ora detto ciascuno dei quali fa subire ai 6 complessi lineari le 120 permutazioni del gruppo di SERRET. I divisori di quest'ultima categoria contengono omologie.

Finalmente, le 10 quadriche lasciate ferme da Θ_4^4 sono permutate transitivamente dal gruppo principale, e ciascuna di esse è quindi trasformata in sè da un sottogruppo di grado 1152.

Il detto gruppo principale, oltre ai sottogruppi G_{16}, contiene sottogruppi G_8 che entrano come divisori nei precedenti, ed anche sottogruppi caratteristici G_6; ma non contiene sottogruppi caratteristici G_{10}.

Osservo ancora che, quando si rappresentano le operazioni del gruppo in discorso mediante sostituzioni quaternarie unimodulari, quali sono le (1), (2) e (3), l'operazione identica viene *necessariamente* rappresentata da quattro sostituzioni diverse, e cioè:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|}
x_1' = & x_1 & -x_1 & ix_1 & -ix_1 \\
x_2' = & x_2 & -x_2 & ix_2 & -ix_2 \\
x_3' = & x_3 & -x_3 & ix_3 & -ix_3 \\
x_4' = & x_4 & -x_4 & ix_4 & -ix_4
\end{array}\;;$$

perciò, il detto gruppo, ha una meriedria d'indice 4 col corrispondente gruppo di sostituzioni quaternarie unimodulari. Questa circostanza si ripete per tutti i gruppi che si incontreranno nel seguito del presente lavoro ed in generale per tutti i gruppi dello spazio che contengono omologie involutorie.

§ VII.—Gruppi G che contengono sottogruppi caratteristici G_{10}.

27. Si consideri un piano σ che passi per il sostegno r di G_{10} e per il centro O di una omologia di G posto fuori di r ed r'.

Il gruppo piano che si ha sopra σ, generato da O e da G_{10}, può essere proprio o improprio.

Nel primo caso, giacchè esso contiene divisori diedri di grado 10, può essere un Γ_{60} o un Γ_{360}. Ma non può essere un Γ_{360} a meno che il gruppo G dello spazio sia improprio.

Infatti, se O' è il punto dove il piano dell'omologia O taglia r', questa omologia e G_{10} lasciano fermo O' e perciò, nella presente ipotesi si ha un gruppo $[O'\Gamma_{360}]$. E siccome Γ_{360} contiene divisori Hessiani Δ_3^3, si ha certamente una omologia di terzo ordine col centro in O'. Allora G, contenendo omologie di terzo e secondo ordine, è improprio.

Dunque, se il gruppo che si ha sopra σ è proprio, si deve ammettere che esso sia un gruppo icosaedrico Γ_{60}, e in questo caso G contiene un sottogruppo $[O'\Gamma_{60}]$. Allora, i vertici di ognuno dei triangoli uniti per i divisori quadrinomi di Γ_{60} sono, come O, centri di omologie i cui piani passano per i lati opposti rispettivi e per O'; sicchè O' è pure esso centro di una omologia involutoria.

Nel secondo caso, cioè quando il gruppo che si ha sopra σ è improprio, io dico che anche il gruppo G dello spazio è improprio.

Infatti siano P', P'', i poli del gruppo ciclico Q_5 che si ha sopra r e P il punto dove σ taglia r'. Il gruppo piano $(P Q_5^2)$ lascia fermo soltanto il punto P e trasforma in sè soltanto il triangolo $PP'P''$. Intanto P viene mosso da O, e quindi nessun punto di σ resta fermo per il gruppo generato da O e (PQ_5^2); perciò, se questo gruppo e improprio, esso appartiene necessariamente alla categoria di quelli che permutano transitivamente i vertici di un triangolo, e questo triangolo è $PP'P''$, perchè è il solo che venga trasformato in sè dal sottogruppo $(P Q_5^2)$. Il punto O cade quindi sopra uno dei due lati PP', PP'', ad esempio sopra il primo, e l'omologia O scambia allora P con P' e lascia fermi P'' ed O'; sicchè nel piano σ si ha un gruppo Δ_{25}^6 e nello spazio un gruppo $[O'\Delta_{25}^6]$.

Questo gruppo contiene un divisore invariante Θ_{25} che lascia singolarmente fermi i vertici del tedraedro $\Theta \equiv O'PP'P''$, e questo divisore produce sopra ogni faccia di Θ gruppi piani che soddisfano alle condizioni *a*) e *b*) del § V, sicchè non può il centro di una omologia di G cadere sopra una di queste facce, senza cadere sopra uno degli spigoli di Θ. Ma se tutti i centri delle omologie contenute in G cadono sopra gli spigoli di Θ, il gruppo G lascia inalterato Θ e perciò è improprio. Si

ammetta dunque, se è possibile, l'esistenza di un tale centro O_1 posto fuori di ogni spigolo e quindi di ogni faccia di Θ, e si consideri il piano $\sigma_1 \equiv O_1 r$ che tagli r' in un punto P_1. Non potendo O_1 cadere sopra una delle rette $P_1 P'$, $P_1 P''$, perchè questi stanno sopra le facce $r' P'$, $r' P''$ di Θ, il gruppo che si ha sopra σ_1, generato da G_{10} ed O_1, è proprio, e quindi è un Γ_{60}. Allora, come ho già osservato, si ha una omologia involutoria col centro nel punto O'_1, dove il piano della omologia O_1 taglia r'.

L'omologia O'_1 scambia i vertici P, O' di Θ e lascia inalterati i vertici P', P''; sicchè, i vertici di Θ, ammettendo la trasposizione (P, O') e la permutazione ciclica di terzo ordine (P, P', P''), subiscono tutte le permutazioni del gruppo simmetrico di 4 cifre, e si ha quindi (n° 12) un gruppo Θ^{24}_{125}. Il corrispondente sottogruppo invariante Θ_{125} contiene, come subito si vede assumendo Θ a tetraedro di riferimento di un sistema di coordinate e come si è detto nel citato n° 12, omografie rigate di quinto ordine sopra tutte le coppie di spigoli opposti di Θ; sicchè, sopra ogni piano passante per r, e perciò sopra σ_1, si ha una omologia *piana* di quinto ordine di centro P_1 e asse r. Ma il gruppo icosaedrico Γ_{60} che si ha sopra σ_1 non comporta una estensione con una siffatta omologia, e quindi non può ammettersi l'esistenza di O_1.

Dunque i centri delle omologie di G cadono tutti sopra gli spigoli di Θ, e perciò G è un gruppo improprio.

28. Dai ragionamenti fatti nel presente paragrafo risulta che un gruppo proprio G, che contiene sottogruppi caratteristici G_{10}, ammette sottogruppi $[O'_2 \Gamma_{60}]$ di grado 120, e che G_{10}, insieme ad una omologia il cui centro O sia fuori di r ed r', genera sempre uno di questi sottogruppi.

Io parto dunque da un gruppo $[O'_2 \Gamma_{60}]$, e comincio col dimostrare che l'omologia involutoria di centro O' è simile, dentro G, a quelle che hanno i centri sopra il piano σ di Γ_{60}.

Infatti sia O'' un trasformato di O' posto fuori di σ; si può anche supporre che O'' stia fuori di r', altrimenti si sceglierà un'altra delle sei rette come r' che passano per O'; allora sopra il piano $\sigma' \equiv r O''$ si ha un gruppo icosaedrico e quindi O'', che è per ipotesi simile ad O', è anche simile ai cinque centri di omologie che stanno sopra la retta r di σ.

Segue che per O' passano rette come r, sostegni di altrettanti sot-

togruppi caratteristici G_{10}. Io cerco quante di siffatte rette passano per O'. Il piano che contiene due di queste rette è lasciato fermo dai due corrispondenti sottogruppi caratteristici G_{10} i quali generano evidentemente sul piano che si considera un gruppo proprio, e questo, per le ragioni dette avanti, è un Γ_{60}. Allora il detto piano è quello di un'omologia che ha il centro in σ, e perciò si hanno 15 di tali piani passanti per O' che sono i trasformati di uno di essi mediante le operazioni di $[O'_2\Gamma_{60}]$. E siccome non più di due sostegni di gruppi G_{10}, uscenti da O', possono stare in un medesimo piano, il che risulta dalla ben nota configurazione di Γ_{60}, si conchiude che i detti sostegni sono in numero di 6.

Segue che questi 6 sostegni di gruppi G_{10}, uscenti da O', sono appunto i trasformati di r' mediante le operazioni del gruppo $[O'_2\Gamma_{60}]$, perchè non esiste altra sestupla di rette che venga trasformata in se stessa dal detto gruppo.

Dunque sopra r' stanno cinque centri di omologie uno dei quali è O', e per r passano cinque piani simili a σ. Dico che su questi cinque piani stanno i centri di tutte le omologie di G ad eccezione di quelli situati sopra r'.

Infatti sia, se è possibile, O_1 un tale centro posto fuori di r' e dei detti cinque piani. Sopra il piano $\sigma_1 \equiv r\,O_1$ si ha allora un gruppo Γ_{60} generato da G_{10} ed O_1, e nel punto O'_1 dove il piano dell'omologia O_1 taglia r' si ha il centro di una nuova omologia involutoria il cui piano è σ_1: ciò è assurdo, perchè sopra r' non si possono avere più di 5 centri di siffatte omologie.

Dopo ciò è facile contare quante omologie contiene il gruppo principale G. Sopra un piano come σ si hanno 10 centri di omologie posti fuori di r, e quindi il numero delle omologie di G, eccettuate quelle che hanno i centri sopra r ed r', è $5 \times 10 = 50$; a queste bisogna ancora aggiungere le 10 omologie che hanno i centri sopra le menzionate due rette, e perciò G contiene in tutto 60 omologie.

Queste 60 omologie sono tutte simili fra loro dentro G, perchè quelle che hanno i centri sopra i cinque piani come σ sono simili alle cinque omologie del gruppo G_{10} avente per sostegno r, e quelle che hanno i centri sopra r' sono simili ad O' e perciò, come si è visto, simili alle precedenti.

Intanto ciascuna delle 60 omologie di G, come ad esempio O', è permutabile con un gruppo $[O'_2\Gamma_{60}]$ di grado 120, e non può essere per-

mutabile con un gruppo di grado maggiore senza che aumenti l'ordine dell'omologia in O' o che si abbia sopra σ un gruppo Γ_{360}; ma si è visto che nessuna di queste ipotesi è ammissibile tutte le volte che G è un gruppo proprio.

Dunque il grado di G risulta $120 \times 60 = 7200$.

D'altra parte, se aggiungo al gruppo $[O'_2 \Gamma_{60}]$ una omografia assiale di quinto ordine avente i poli situati sopra r' in modo da separare armonicamente i punti O', P, precisamente una di quelle che, insieme ad O', genera il gruppo diedro G'_{10} avente per sostegno r', ottengo appunto il gruppo di grado 7200 da me studiato nel lavoro « *I Gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie* » *) e là denotato col simbolo $\overline{G}_{7200}$, il quale lascia inalterata una quadrica; dunque con questo gruppo deve necessariamente coincidere l'attuale gruppo G.

La conchiusione di questo paragrafo è che:

Esiste un solo gruppo proprio di trasformazioni lineari dello spazio per cui vi sono rette che contengono ciascuna 5 centri di omologie involutorie; esso è un gruppo di grado 7200 che trasforma in sè una quadrica.

29. Il gruppo in discorso contiene omografie rigate di quinto e terzo ordine i cui assi appartengono tutti alla detta quadrica: due omografie rigate di quinto ordine i cui assi non si tagliano, e che perciò appartengono ad un medesimo sistema di generatrici della quadrica, generano un gruppo icosaedrico dello spazio del tipo:

$$(1) \qquad [R_{60} R_{60}]^{1}_{60}$$

che lascia singolarmente ferme le generatrici dell'altro sistema. Qualsivoglia omologia del gruppo principale scambia i due sistemi di generatrici, e perciò porta il detto gruppo icosaedrico in un secondo gruppo icosaedrico simile che muove le generatrici lasciate ferme dal primo.

Ogni operazione di uno di questi gruppi icosaedrici è quindi permutabile con tutte le operazioni dell'altro, ed i 60×60 prodotti che si ottengono componendo in tutti i modi le loro operazioni costituiscono un gruppo di grado 3600 del quale i gruppi icosaedrici in discorso sono divisori invarianti e che è a sua volta divisore invariante d'indice due del gruppo principale. Questo gruppo contiene altri due tipi di gruppi icosaedrici omograficamente diversi. Uno di questi tipi è quello contenuto

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XV, anno 1901.

goli $AA'A''$, $AB'B''$ è triangolo base di un gruppo ottaedrico Δ_4^6 contenuto in Γ_{168} e i suoi vertici sono permutati transitivamente da questo gruppo. Si conclude che A, e per conseguenza anche A''', sono centri di omologie involutorie.

Nella seconda ipotesi, cioè quando il gruppo generato da G_8 ed O' sopra σ' è improprio, siccome O' muove A, che è il solo punto fermo per il menzionato gruppo piano di grado 8, si ha in σ' un gruppo che permuta transitivamente i vertici di un triangolo.

Questo triangolo è necessariamente uno dei tre che il detto gruppo di grado 8 lascia inalterati; ma non è $AP'P''$, perchè il punto O', che ho supposto fuori di tutte e perciò delle due faccie $r'P'$, $r'P''$ di Θ, non cade sopra nessuna delle due rette AP', AP''; esso triangolo sarà quindi, per esempio, $AA'A''$. Allora O' cade, tanto per fissare le idee, sopra il lato AA', e l'omologia O' scambia A con A' lasciando fermi A'' ed A'''. Dunque nel piano σ' si ha un gruppo ottaedrico avente per base il triangolo $AA'A''$; ed il vertice A, come pure il punto A''', sono centri di omologie involutorie.

L'omologia A permuta i vertici P, P''' di Θ e lascia inalterati i vertici P', P'', così che i vertici del tetraedro Θ subiscono tutte le permutazioni possibili, e G contiene un sottogruppo Θ_{16}^{24}, precisamente quello descritto nel n° 13. Dunque r' è, come r, sostegno di un gruppo caratteristico G_8', e sopra r' stanno 4, e non più, centri di omologie che si scindono in due coppie; una di queste coppie è (A, A''') e l'altra la denoto con (B, B''').

Considero ora i 6 piani che projettano da r i 6 punti:

(1) $\qquad (P, P'''), \quad (A, A'''), \quad (B, B''')$

situati sopra r'; dico che sopra questi piani stanno, senza eccezione, tutti i centri delle omologie di G.

Infatti sia, se è possibile, O_1 un tale centro posto fuori di ciascuno dei detti piani e perciò fuori di r ed r'.

Il punto O_1 non può cadere sopra una delle due facce $r'P'$, $r'P''$ di Θ, perchè allora esso dovrebbe cadere sopra uno spigolo di Θ e quindi sopra uno dei due piani rP, rP'''.

Allora, ragionando sopra O_1 come si è avanti ragionato a proposito del punto O', si conchiude che, in ogni caso, il punto dove il piano $\sigma_1 \equiv rO_1$ taglia r' è centro di una omologia involutoria. Questo centro è necessariamente uno dei quattro centri situati sopra r', e quindi σ_1 coincide con uno degli ultimi 4 dei 6 piani in discorso.

Riepilogando: nel primo dei casi considerati in principio di questo paragrafo, tutte le omologie di G hanno i centri distribuiti precisamente sopra sei piani passanti per il sostegno r di uno dei sottogruppi caratteristici G_8; la retta r' associata ad r è pure sostegno di un sottogruppo caratteristico G'_8 e sopra essa stanno tre coppie di punti (1) simili alle coppie di punti che stanno sopra r. I detti sei piani di r passano per le coppie (1): quelli che passano per i punti della prima coppia sono simili, perchè sono portati l'uno nell'altro, ad esempio, dall'omologia A, e quelli che passano per i punti delle rimanenti due coppie sono tutti e quattro simili fra loro, perchè queste due coppie sono portate l'una nell'altra per mezzo di una delle omografie assiali di Θ_{16} che producono operazione di quarto ordine sopra r'.

31. Io passo ora a considerare il secondo dei menzionati casi, cioè quando sopra nessuno dei due piani $r'P'$, $r'P''$ cadono centri di omologie all'infuori di quelli che potrebbero trovarsi sopra la retta r'.

Sia O' il centro di una omologia di G posto fuori di r ed r' e siano, come prima, A''' ed A i punti dove la retta r' viene tagliata dal piano di O' e dal piano $\sigma' \equiv r\,O'$. Se il gruppo che G_8 ed O' generano sopra σ' è proprio, esso è, come si è visto avanti, un Γ_{168} ed A, A''' sono centri di omologie involutorie, e se invece il detto gruppo piano è improprio, esso è uno di quelli che permutano transitivamente i vertici di uno dei tre triangoli che si ottengono projettando da A le tre coppie di punti che stanno sopra r. Ma, in quest'ultima ipotesi, giacchè O' non cade sopra nessuna delle rette AP', AP'', perchè queste appartengono ai piani $r'P'$, $r'P''$, il triangolo che viene trasformato in sè dal gruppo improprio in discorso è, ad esempio, $AA'A''$; perciò A ed anche A''' sono centri di omologie involutorie e si ha sopra σ' un gruppo ottaedrico Δ_4^6.

Dunque, in ogni caso, sotto l'ipotesi 2), un piano σ' che passa per r e per un centro di omologia O' posto fuori di r, taglia la retta r' in un punto A che è centro di una omologia involutoria, ed è pure un tale centro il punto A''' dove il piano di O' taglia la retta stessa.

Ora non tutti i trasformati del centro A''' mediante le operazioni di G possono stare sopra r', a meno che G sia un gruppo improprio, e quindi non tutti i corrispondenti piani σ' passano per r. Sia dunque σ_1 un tale piano non passante per r; sopra esso sta, come in σ', un gruppo

Γ_{168} o un gruppo Δ_4^6. Il piano σ_1 taglia i due piani rA, rA''' secondo due rette e su queste non possono essere distribuiti tutti i 21 centri di Γ_{168} od i 9 centri di Δ_4^6 giacenti in σ_1; resta dunque dimostrata l'esistenza di un centro di omologia O'' posto fuori dei due ora detti piani passanti per r. Allora il piano di O'' ed il piano $\sigma'' \equiv r\,O''$ tagliano r' in due punti B''', B che sono pure centri di omologie involutorie.

Dunque sopra la retta r' stanno 4 centri di omologie:

$$(A,\ A'''),\qquad (B,\ B''')$$

e queste omologie generano necessariamente un gruppo caratteristico G_8' che ha come sostegno la retta stessa, perchè r ed r' sono assi di una omografia rigata involutoria (n° 22).

Segue che i piani come σ', che passano per r e contengono centri di omologie del gruppo principale G posti fuori di r, sono in numero di 4, precisamente quelli che projettano da r i detti quattro centri di r'; quindi tutti i centri delle omologie di G, senza eccezione, stanno sopra questi quattro piani.

Ciò premesso, è facile dimostrare che, tanto nel caso 1) che nel caso 2), non è possibile che si abbia sopra un piano σ' passante per r un gruppo proprio Γ_{168}, a meno che G sia improprio.

Infatti sia σ_1 un trasformato del piano σ' che non passi per r. Sopra σ_1 si ha per ipotesi, come in σ', un gruppo Γ_{168} che contiene 21 centri di omologie involutorie. E siccome tutti i centri delle omologie del gruppo principale G sono distribuiti sopra 6 o 4 piani passanti per r, secondo che si verifica il caso 1) o il caso 2), quelli che cadono sopra σ_1 sono, in particolare, distribuiti sopra 6 o 4 rette uscenti da un punto, che è il punto dove σ_1 taglia r. Ciò è assurdo, perchè, come ho osservato alla fine del § I, la configurazione del gruppo Γ_{168} non comporta tali distribuzioni delle sue 21 omologie.

32. Ora passo alla enumerazione delle omologie contenute in G tenendo sempre distinti i casi 1) e 2). Mi metto prima nel caso 1).

Sopra il piano $\sigma \equiv rP$ si ha un gruppo Δ_{16}^6 che contiene 12 centri di omologie, 4 sopra ogni lato del triangolo $PP'P''$. E non possono cadere in σ un maggior numero di tali centri, perchè ogni centro che cade in σ, come ho già osservato, cade necessariamente in uno dei lati del detto triangolo, e non può aversi sopra uno di questi lati un numero di centri maggiore di quanto segna il corrispondente gruppo caratteristico G_8.

Dei 12 centri che cadono sopra σ soltanto 8 sono fuori di r; altrettanti se ne hanno sul piano rP''' simile a σ, e perciò si hanno $2 \times 8 = 16$ centri fuori di r appartenenti ai detti due piani.

Sopra il piano $\sigma' \equiv rA$ si ha un gruppo ottaedrico Δ_4^6 che contiene 9 centri di omologie involutorie; 3 nei vertici del triangolo $AA'A''$ ed ancora altri 2 sopra ogni suo lato. Non possono cadere sopra σ' più di 9 centri, perchè, il gruppo che si ha su questo piano dovendo essere improprio, ogni centro che cade in σ' sta sopra uno dei lati del detto triangolo, che è il solo triangolo trasformato in sè dal gruppo Δ_4^6; ma già ciascuno di questi lati è sostegno di un gruppo caratteristico G_8, e quindi non può contenere più di 4 centri.

Dei 9 centri che cadono in σ' soltanto 5 sono fuori di r; altrettanti se ne hanno sopra ciascuno dei tre piani rA''', rB, rB''' i quali, come si è visto, sono tutti simili al piano σ', e perciò si hanno $4 \times 5 = 20$ centri fuori di r appartenenti ai 4 piani ora detti.

Bisogna ancora aggiungere le quattro omologie che hanno i centri sopra r, e quindi il gruppo principale G contiene in tutto:

$$16 + 20 + 4 = 40$$

omologie.

Tutte queste omologie sono simili fra loro dentro G, perchè esse sono simili a quelle contenute nel sottogruppo caratteristico G_8 che ha per sostegno r, le quali, come ho già osservato, sono permutate transitivamente da una delle omografie assiali del gruppo Θ_{16} che produce una operazione di quarto ordine sopra r.

Cerco ora con quante operazioni è permutabile una omologia di G. Per esempio, l'omologia di centro A''', che ha per piano σ', è permutabile con un gruppo $[A_2'''\Delta_4^6]$ di grado 48. E non è permutabile con un gruppo di grado maggiore, perchè allora o aumenta l'ordine dell'omologia in A''', il che è da escludersi, o aumenta il grado del gruppo in σ'; in quest'ultimo caso, tenendo sempre presente che il gruppo sopra σ' deve trasformare in sè il triangolo $AA'A''$, si ha sopra uno dei lati, ad esempio sopra $A'A''$, un gruppo ciclico, di grado maggiore di 2, avente i poli in A', A'', e quindi più di 4 omologie coi centri sul detto lato.

Dunque il grado del gruppo principale G è $48 \times 40 = 1920$.

Ciò posto, assumendo $\Theta' \equiv AA'A''A'''$ come tetraedro di riferimento di un sistema di coordinate, scrivo le operazioni generali del

gruppo Θ'_8 che lascia fermi i singoli vertici di Θ': queste operazioni possono essere:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = \quad x_1 \\ x'_2 = \quad x_2 \\ x'_3 = -x_3 \\ x'_4 = -x_4 \end{array}\right| ; \quad \begin{array}{l} x'_1 = \quad x_1 \\ x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_3 \\ x'_4 = \quad x_4 \end{array}\Bigg| ; \quad \begin{array}{l} x'_1 = -\eta x_1 \\ x'_2 = \quad \eta x_2 \\ x'_3 = \quad \eta x_3 \\ x'_4 = \quad \eta x_4 \end{array}\Bigg| ;$$

denotando η una radice primitiva ottava dell'unità.

Posso supporre che i vertici P', P''; P, P''' del tetraedro Θ abbiano ordinatamente le coordinate:

$$(1,\ 1,\ 0,\ 0), \quad (1,\ -1,\ 0,\ 0);$$
$$(0,\ 0,\ 1,\ 1), \quad (0,\ 0,\ -1,\ 1);$$

allora una delle omografie assiali del gruppo Θ_{16} che producono operazioni di quarto ordine sopra le rette:

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad x_1 = x_2 = 0,$$

si scrive:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = \quad \frac{\eta}{\sqrt{2}}(x_1 + i x_2) \\ x'_2 = \quad \frac{\eta}{\sqrt{2}}(i x_1 + x_2) \\ x'_3 = -\frac{\eta}{\sqrt{2}}(i x_3 + x_4) \\ x'_4 = -\frac{\eta}{\sqrt{2}}(x_3 + i x_4). \end{array}\right.$$

Le collineazioni (2) e (3) generano un gruppo

$$[Q_4^2\, Q_4^2]_2^2$$

di grado 64 che lascia inalterate ciascuna delle due menzionate rette, che sono le rette r, r'.

Aggiungo ancora un'omologia O' che permuti A con A' lasciando fermi i vertici A'', A''' del tetraedro Θ'. Posso supporre che il centro O' di questa omologia abbia le coordinate:

$$(1,\ 0,\ -1,\ 0),$$

ed allora essa si scrive:

$$\begin{array}{l} x'_1 = \eta x_3 \\ x'_2 = \eta x_2 \\ x'_3 = \eta x_1 \\ x'_4 = \eta x_4, \end{array}$$

che è la (3) del n° 25.

Il gruppo G, o un suo trasformato, contiene dunque le collineazioni (2), (3), e quella ultimamente scritta, le quali, come è facile verificare, appartengono al gruppo scoperto da KLEIN di cui mi sono occupato nel § VI, perchè il gruppo Θ_{32} che là si presenta contiene come divisore Θ_{16}. Queste collineazioni generano precisamente un gruppo di grado 1920 che è uno dei 6 divisori del gruppo di KLEIN ora ricordato che permutano ciascuno i sei relativi complessi lineari secondo un gruppo di SERRET di grado 120.

33. Considero ora il caso 2).

In questo caso, come si è visto al n° 31 del presente paragrafo, i centri di tutte le omologie del gruppo G sono distribuiti sopra 4 piani passanti per r e per i quattro centri di r'.

Nel piano $\sigma' \equiv rA$ si ha un gruppo Δ_4^6, così che i vertici del tetraedro $\Theta' \equiv AA'A''A'''$ ammettono la permutazione ciclica di terzo ordine (A, A', A''); inoltre, per esempio, l'omologia B produce la trasposizione (A, A'''), e quindi i vertici di Θ' subiscono tutte le permutazioni possibili. Si ha perciò un gruppo $\Theta_8'^{24}$ di grado $8 \times 24 = 192$ che trasforma in sè il tetraedro Θ': questo è il gruppo descritto nel n° 13.

Siccome sopra ogni faccia di Θ' deve aversi un gruppo improprio, secondo si è dimostrato alla fine del n° 31, non può il centro di una omologia cadere sopra una di queste facce senza cadere sopra uno spigolo; ma allora il centro che si considera coincide necessariamente con uno dei quattro centri che si hanno sul detto spigolo.

Dunque, se G non coincide col menzionato gruppo improprio $\Theta_8'^{24}$, esiste un centro di omologia O'' posto fuori di ogni faccia di Θ'. Esso cade ad esempio sopra il piano $\sigma'' \equiv rB$ e quindi sopra una delle rette BB', BB'', perchè il gruppo generato da G_8 ed O'' sopra σ'' deve essere improprio, e d'altra parte O'' non cade, per ipotesi, sopra nessuna delle rette che proiettano da B le coppie di punti A', A''; P', P'' di r. Allora si ha sopra σ'' un gruppo Δ_4^6 e si conchiude l'esistenza di un secondo gruppo $\Theta_8''^{24}$ che ha per base il tetraedro $\Theta'' \equiv BB'B''B'''$.

I due gruppi $\Theta_8'^{24}$, $\Theta_8''^{24}$ sono omograficamente eguali ma non si è autorizzati a conchiudere che essi sono simili dentro il gruppo principale G.

È chiaro che, ad esempio, il gruppo $\Theta_8'^{24}$ contiene *tutte* le operazioni del gruppo principale G che trasformano in sè il tetraedro Θ', perchè, se questo potesse restare inalterato per un gruppo di grado maggiore

contenuto in G, dovrebbe aumentare il grado del corrispondente sottogruppo che lascia fermi i singoli vertici di Θ'; ma allora sopra uno spigolo di Θ', ad esempio sopra $A'A''$, si avrebbe un gruppo ciclico, coi poli in A', A'', di grado maggiore di 2, e quindi più di 4 omologie coi centri sul detto spigolo.

Ciò posto, sopra ciascuno dei quattro piani:

$$rA, \quad rA'''; \quad rB, \quad rB'''$$

stanno 9 centri di omologie dei quali 4 appartengono alla retta r. Dunque il gruppo principale G contiene in tutto:

$$5 \times 4 + 4 = 24$$

omologie involutorie.

A causa dei gruppi Δ_4^6 esistenti sopra i quattro piani anzidetti, si vede immediatamente che 12 di queste omologie sono, dentro G, simili ad A' e quindi alle omologie che hanno i centri nei vertici di Θ', e le rimanenti 12 sono simili a quelle che hanno i centri nei vertici di Θ''.

Dunque, se esiste una operazione di G che porti uno dei vertici di Θ' in uno dei vertici di Θ'', tutte le omologie del gruppo G sono simili dentro il gruppo stesso, e siccome ognuna di esse, per esempio A''', è permutabile con un gruppo $[A_2'''\Delta_4^6]$ di grado 48, il gruppo G è di grado $48 \times 24 = 1152$.

Se invece non esiste una tale operazione, ogni omologia di G ha soltanto 12 trasformate dentro G, e quindi il grado di questo gruppo è $48 \times 12 = 576$.

34. In ogni caso il gruppo G è un divisore del gruppo di Klein di 11520 collineazioni.

Infatti il gruppo $\Theta_8'^{24}$ ha evidentemente un solo sottogruppo invariante $\Theta_4'^4$ di grado 16; similmente $\Theta_8''^{24}$ ha pure un solo sottogruppo invariante di grado 16 rappresentato da $\Theta_4''^4$. Giacchè i vertici di Θ' subiscono tutte le permutazioni possibili, esiste una omografia rigata involutoria che porta i vertici A', A'' di r nei vertici A, A''' di r', e questa stessa omografia porta per necessità i due centri di omologie B', B'' nei due centri B, B''', sicchè essa produce anche nei vertici di Θ'' una permutazione di secondo ordine del gruppo quadrinomio transitivo. Dunque la detta omografia appartiene contemporaneamente ai due sottogruppi $\Theta_4'^4$, $\Theta_4''^4$; ma appartengono anche a questi sottogruppi le omografie rigate involutorie che hanno come assi le coppie di spigoli opposti dei

due tetraedri Θ', Θ'', le quali generano un gruppo di grado 8, dunque si ha:

$$\Theta_4'^4 = \Theta_4''^4 = \Theta_4^4,$$

giacchè $\Theta \equiv PP'P''P'''$ è pure evidentemente uno dei 15 tetraedri che il detto gruppo di grado 16 trasforma in sè.

Ciò posto, siccome non esiste nessuna collineazione, all'infuori di quelle contenute in Θ_4^4, che lasci singolarmente fermi i sei complessi lineari determinati da Θ_4^4, è chiaro che ogni collineazione che trasformi in sè il gruppo Θ_4^4, e che perciò permuti i detti sei complessi, appartiene al gruppo principale di 11520 collineazioni che ammette Θ_4^4 come divisore invariante, giacchè il gruppo principale ora detto fa subire tutte le permutazioni possibili ai sei complessi in discorso.

Perciò, essendo Θ_4^4 sottogruppo invariante dei due gruppi $\Theta_8'^{24}$, $\Theta_8''^{24}$, tutte le operazioni contenute in questi due gruppi appartengono al gruppo di grado 11520 determinato da Θ_4^4.

Nella ipotesi che esista una operazione di G che porta un vertice di Θ' in un vertice di Θ'', ad esempio A''' in B''', essa porterà il piano σ' di A''' nel piano σ'' di B''', e siccome sopra σ'' si ha un solo gruppo Δ_4^6, avviene che la detta operazione porta il tetraedro Θ' sopra Θ'' ed il gruppo $\Theta_8'^{24}$ in $\Theta_8''^{24}$. E siccome i vertici di questi tetraedri subiscono tutte le permutazioni possibili, esiste una operazione S di G che porta i vertici A', A'' in B', B'' ed i vertici A, A''' in B, B'''; allora questa operazione lascia ferme le due rette r, r' e quindi porta inversamente Θ'' in Θ'. Dunque l'operazione S, giacchè scambia semplicemente i due gruppi $\Theta_8'^{24}$, $\Theta_8''^{24}$, deve trasformare in sè il comune sottogruppo invariante Θ_4^4, e perciò appartiene al gruppo di Klein.

Intanto il gruppo generato da S e dalle operazioni di $\Theta_8'^{24}$ permuta evidentemente in modo transitivo le 24 omologie di G, così che esso è, come avanti si è visto, di grado 1152 e perciò coincide con G. Dunque G, essendo generato da operazioni che stanno tutte in un gruppo di Klein, è un divisore di questo gruppo.

Nella ipotesi che non esista una operazione di G che porti un vertice di Θ' in un vertice di Θ'', le 24 omologie di G si scindono in due classi intransitive di 12 omologie ciascuna tali che quelli appartenenti ad una stessa classe sono permutate transitivamente dal gruppo G stesso. Ora il gruppo generato da tutte le operazioni contenute in $\Theta_8'^{24}$, $\Theta_8''^{24}$ permuta evidentemente in modo transitivo le 12 omologie di G simili ad

A' e le 12 omologie simili a B', così che esso è, come si è visto, di grado 576, e perciò coincide con G. Dunque il gruppo G è un divisore del gruppo di KLEIN.

Il gruppo di BURCKARDT contiene effettivamente divisori di grado 1152 e 576; quelli di grado 1152 sono omograficamente eguali e ciascuno di essi lascia inalterata una delle 10 quadriche annesse al gruppo principale; invece quelli di grado 576 sono di tre tipi omograficamente diversi e tutti contenuti nei precedenti divisori di grado 1152, ma uno solo di questi tre tipi possiede omologie involutorie. Cosicchè in conchiusione si ha un solo tipo di gruppi di grado 1152 ed un solo tipo di gruppi di grado 576 che contengono omologie; questi gruppi sono quelli da me denotati coi simboli $\overline{G}_{1152}$, $\overline{G}_{576}$ nel mio lavoro citato nella prefazione.

§ IX. — Gruppi G che contengono sottogruppi caratteristici G_6.

35. Negli ultimi tre paragrafi ho trovato tutti i gruppi improprii G che contengono sottogruppi caratteristici G_{16}, G_{10}, G_8; mi resta dunque ad esaminare, in base all'analisi del § V, solo l'ipotesi che G contenga esclusivamente sottogruppi caratteristici G_6, di modo che due omologie quali si vogliano dei gruppi di cui ora mi occupo o sono tali che il centro dell'una sta nel piano dell'altra, oppure esse generano sopra la retta dei centri un gruppo diedro di grado 6, e quindi sopra qualsivoglia retta dello spazio non stanno mai più di tre centri di omologie.

Io posso ancora supporre che le omologie i cui centri cadono in uno stesso piano generino su questo piano un gruppo improprio. E difatti non può mai aversi un gruppo Hessiano Δ_3^3, perchè allora, come più volte si è osservato, il gruppo G conterrebbe omologie di terzo ordine; dunque, se il gruppo che si ha sopra il piano che si considera fosse proprio, esso potrebbe essere (n° 8) un Γ_{60} o un Γ_{168}; ma allora G conterrebbe sottogruppi caratteristici del tipo G_{10} o del tipo G_8.

Ciò posto si consideri una omologia di G e si chiami O il suo centro e π il suo piano. Giacchè non tutti i centri delle omologie di G, eccettuato O, possono cadere in π a meno che G sia improprio, esiste un tale centro O' posto fuori di π, ed allora la retta $r = O\,O'$ è sostegno di un gruppo caratteristico G_6.

Ma non tutti i menzionati centri cadono sopra r, e perciò esiste un centro O'' posto fuori di r il quale può cadere in π o fuori di π.

Io esamino quest'ultima ipotesi; allora la retta $O O''$ è pure essa sostegno di un gruppo caratteristico G_6, così che il piano $\sigma = r O''$ è lasciato fermo da due siffatti gruppi caratteristici. Il gruppo che si ha in σ deve anzitutto essere improprio e, d'altra parte, è evidente che esso non lascia fermo alcun punto del piano; dunque sarà uno di quei gruppi che permutano transitivamente i vertici di uno stesso triangolo Δ, i quali vertici denoto con P', P'' P'''. Tutti i centri di omologie che cadono in σ stanno perciò sopra i lati di Δ, e siccome questi centri sono in numero maggiore di 3, ve ne sono di quelli che stanno fuori dei vertici di Δ. Il grado n del gruppo Δ_n che lascia fermi i singoli vertici di Δ non può essere divisibile per 3, perchè allora si avrebbe sopra σ un gruppo Hessiano Δ_3^3, il che è da escludersi; inoltre, il gruppo ciclico che Δ_n produce sopra ogni lato di Δ non può essere di grado maggiore di 2, perchè allora, non essendo questo grado uguale a 3, sarebbe maggiore di 3, e quindi si avrebbero sopra ogni lato di Δ più di tre centri di omologie. Dunque Δ_n è certamente un gruppo quadrinomio Δ_4, e perciò tutte le operazioni di G che lasciano inalterato σ generano su questo piano un gruppo ottaedrico Δ_4^6.

Le ora dette operazioni lasciano fermo un punto P, posto fuori di σ, per il quale passano i piani delle omologie che hanno i centri in σ, e nello spazio si ha un gruppo $[P\Delta_4^6]$ che è effettivamente di grado 24, perchè P non può essere centro di una omologia. Infatti, se P fosse centro di una omologia, che debbo supporre involutoria, si avrebbe un gruppo $[P_2\Delta_4^6]$ di grado 48, e il tetraedro $\Theta = PP'P''P'''$ sarebbe lasciato fermo, elemento per elemento, da un gruppo Θ_8 che contiene evidentemente 4 omologie coi centri nei vertici di Θ; ma allora sopra ogni lato di Δ si avrebbero 4 centri di omologie, il che è da escludersi.

Segue che il tetraedro Θ è trasformato in sè, elemento per elemento, soltanto da un gruppo quadrinomio Θ_4 costituito dall'identità e da 3 omografie rigate involutorie, e che in σ stanno 6, e non più, centri di omologie che si scindono in tre coppie, una per ogni lato di Δ. Di questi 6 centri, 5 stanno sopra le due rette $O O'$, $O O''$ ed il sesto, che denoto con O_1, è quello accoppiato con O e sta perciò nel piano π di O.

In ogni caso, sia che O'' appartenga o no al piano π, si conchiude l'esistenza di un centro O_1 posto in π sopra la traccia del piano $\sigma = r O''$. E siccome non tutti i centri delle omologie di G cadono in σ, esiste un centro O''' posto fuori di questo piano; allora ragionando come pre-

cedentemente, si conchiude l'esistenza di un secondo centro O_2 posto nel piano π sopra la traccia del piano $r\,O'''$.

36. Io debbo ora distinguere due casi che portano come si vedrà a due ben diversi gruppi G.

1) Le due omologie O_1, O_2 sono tali che il centro dell'una sta nel piano dell'altra.

2) Le omologie O_1, O_2 generano un gruppo diedro G_6.

Nel primo caso il punto O_3 dove s'incontrano i tre piani delle omologie O, O_1, O_2 è pure centro di una omologia involutoria e si ha un gruppo Θ_8' che lascia fermi i singoli vertici del tetraedro $\Theta' = O\,O_1\,O_2\,O_3$. Sopra π si hanno tre centri di omologie O_1, O_2, O_3 costituenti un triangolo: dico che non possono aversi in π altri centri.

Infatti, se un quarto centro di omologia cade sopra uno dei tre lati del triangolo $O_1\,O_2\,O_3$, il punto dove il relativo piano taglia il lato stesso, è pure un centro di omologia, e si avrebbero allora almeno 4 centri sopra una medesima retta; dunque questa ipotesi è da scartarsi. Se poi un quarto centro cade in π, ma fuori di ogni lato di $O_1\,O_2\,O_3$, giacchè il gruppo che si viene a generare sopra π deve essere improprio, anzi, nella presente ipotesi, un gruppo che permuta transitivamente i vertici di uno stesso triangolo, l'omologia corrispondente a questo quarto centro porta, ad esempio, il punto O_1 sopra il lato $O_2\,O_3$, perchè ogni triangolo che viene trasformato in sè dal gruppo quadrinomio generato da O_1, O_2, O_3 ha un vertice ed il lato opposto in comune col triangolo $O_1\,O_2\,O_3$. E si conchiude come prima che sopra la retta $O_2\,O_3$ stanno almeno 4 centri di omologie.

La retta r avanti considerata, essendo sostegno di un gruppo G_6, non giace sopra nessuna delle facce di Θ', perchè si è visto che sopra ognuna di queste facce non si hanno altri centri di omologie all'infuori dei vertici di Θ'; dunque la traccia A della retta r su π è fuori di ogni lato del triangolo $O_1\,O_2\,O_3$. Allora il gruppo quadrinomio generato da O_1, O_2, O_3 fa assumere ad A quattro posizioni distinte, e si hanno 4 rette simili ad r.

Sopra ciascuno dei 6 piani che queste rette determinano due a due si ha, come si è visto, un gruppo ottaedrico Δ_4^6, e le tracce in π di quei piani che passano, ad esempio, per $r = OA$ sono le rette che projettano da A i tre punti O_1, O_2, O_3, sicchè questi punti costituiscono

il triangolo diagonale del quadrangolo completo avente come vertici i 4 punti simili ad A. Segue che le rette uscenti da O che siano sostegni di gruppi caratteristici G_6 non possono essere più di 4, perchè non più di due di tali rette stanno in uno stesso piano e, all'infuori di O_1, O_2, O_3, non si hanno in π altri centri di omologie.

Dopo ciò è facile contare tutte le omologie di G: ve ne sono 3 coi centri in π, altre 8 coi centri sopra le menzionate quattro rette, precisamente due sopra ciascuna retta senza contare O, e finalmente l'omologia O stessa; dunque G contiene in tutto 12 omologie.

37. Considero ora uno dei gruppi ottaedrici dello spazio $[P\Delta_4^6]$, ad esempio quello che lascia inalterato il piano $\sigma = r\, O_1$. La retta $O\,O_1$ è uno dei lati del triangolo $\Delta = P'P''P'''$, cioè uno degli spigoli del tetraedro $\Theta = PP'P''P'''$, per esempio lo spigolo $P''P'''$, ed il suo opposto PP' è la retta dove si tagliano i piani di O ed O_1, cioè la retta $O_2\,O_3$; dunque le due rette $O\,O_1$, $O_2\,O_3$ sono nello stesso tempo due spigoli opposti dei tetraedri Θ e Θ'. Una omografia rigata del gruppo quadrinomio Θ_4 i cui assi si appoggiano alle due menzionate rette, scambia necessariamente O_2 con O_3 ed O con O_1; allora l'omologia O_2 scambia P con P' lasciando fermi P'', P''', così che i vertici di Θ subiscono tutte le permutazioni possibili e si ha un gruppo Θ_4^{24} di grado 96, che è quello descritto nel n° 13.

Questo gruppo, come si è già osservato, lascia inalterati tre tetraedri che si trovano nelle identiche condizioni di Θ rispetto al gruppo; invece permuta in tutti i modi tre tetraedri analoghi a Θ'. Il gruppo in discorso contiene precisamente 12 omologie, cioè tutte le omologie del gruppo principale G, e si può ritenere da queste generato; ma ogni operazione di G non può che permutare fra loro le dette 12 omologie e quindi deve trasformare in sè il gruppo Θ_4^{24}, così che questo è un sottogruppo invariante di G. Allora è anche sottogruppo invariante di G il gruppo Θ_4^4 di grado 16 che contiene tutte le omografie rigate involutorie di Θ_4^{24}, e quindi G, giacchè trasforma in sè un tale gruppo Θ_4^4, è contenuto in un gruppo di KLEIN.

Una operazione di G non contenuta in Θ_4^{24} non può lasciare fermo nessuno dei tre tetraedri analoghi a Θ, perchè, se ad esempio Θ resta fermo per una tale operazione, giacchè i suoi vertici subiscono tutte le possibili permutazioni mediante Θ_4^{24}, si ha un gruppo di grado maggiore

di 4 che lascia fermi i singoli vertici di Θ, e si è visto (n° 35) che ciò non può verificarsi per i gruppi G che sto considerando. Dunque la detta operazione fa necessariamente subire ai tre tetraedri in discorso una permutazione ciclica del terzo ordine, e il gruppo G risulta quindi di grado $96 \times 3 = 288$.

Intanto il gruppo di Klein possiede un solo tipo di divisori di grado 288 che contengono omologie, e perciò l'attuale gruppo G è omograficamente identico ad uno di quelli.

Un tale gruppo G contiene un divisore di grado 9, necessariamente abeliano, che lascia fermo un tetraedro elemento per elemento e che è costituito di 4 omografie planari aventi a due a due i poli sopra due spigoli opposti del tetraedro e di 4 omografie rigate aventi per assi i rimanenti spigoli. Le omografie planari che hanno i poli sopra uno stesso spigolo permutano circolarmente, ad esempio, i tetraedri Θ' e lasciano fermi i tetraedri Θ, e quindi appartengono al gruppo Θ_4^{24}; mentre quelle che hanno i poli sopra lo spigolo opposto permutano i tetraedri Θ e lasciano fermi i tetraedri Θ' ed appartengono contemporaneamente a tre gruppi $\Theta_4'^{12}$. Così, nella configurazione di G, si hanno due terne di tetraedri formanti due terne desmiche che si comportano però in modo diverso rispetto a G.

Osservo finalmente che il gruppo G in discorso è omograficamente identico ai divisori di grado 288 contenuti nel gruppo di grado 7200 del quale mi sono occupato nel § VII, ed è anche divisore di un gruppo di grado 576 che è quello trovato alla fine del n° 34.

38. Esamino ora il secondo dei casi considerati al principio del n° 36, cioè il caso in cui le omologie O_1, O_2, coi centri in π, generino un gruppo diedro di grado 6. Allora sopra la retta $p = O_1 O_2$ si ha ancora un terzo centro di omologia O_3; queste tre omologie lasciano ferma una seconda retta p' intersezione dei piani di O_1 ed O_2, e questa retta passa per O e taglia π in un punto P fuori di p.

Dico che sopra i piani π e $\pi' = Op$ non cadono altri centri di omologie all'infuori di quelli che già vi sono.

Infatti, se in π cade un quarto centro di omologia, esso non può cadere sopra la retta p, perchè ivi si trovano già tre centri di omologie, e nemmeno può cadere in P, perchè allora le omologie coi centri in O e P generano una omografia rigata involutoria che ha per assi le rette

p, p', e quindi i punti dove i piani di O_1, O_2, O_3 tagliano p sarebbero pure centri di omologie involutorie e si avrebbero 6 di tali centri posti sopra p.

Si supponga dunque che un quarto centro cada in π ma fuori di p e P; allora, il gruppo che si viene a generare sopra π dovendo essere improprio, anzi, nella presente ipotesi, uno di quelli che permutano transitivamente i vertici di un triangolo Δ, si dimostra come al n° 35 che il detto gruppo è un Δ_4^6; poi, essendo O centro di una omologia, si ha nello spazio un gruppo $[O_2\Delta_4^6]$ di grado 48, e perciò 4 centri di omologie sopra ogni lato di Δ, il che è da escludersi. Dunque nel piano π cadono soltanto tre centri di omologie che sono quelli che stanno sopra la retta p.

Per quel che riguarda il piano $\pi' = Op$, osservo che il gruppo improprio di grado 12 generato dalle 4 omologie che hanno ivi il loro centro lascia inalterato un solo triangolo che è quello che si ottiene projettando da O i due poli del gruppo diedro che si ha sopra p; quindi, se una nuova omologia ha il centro in π', questo centro cade sopra una delle due projettanti ora dette così che la nuova omologia che si considera porta O in uno dei detti poli, e perciò si avrebbero sopra p non meno di 5 centri di omologie.

In particolare, sul piano π' non può cadere altra retta diversa da p che sia sostegno di un gruppo G_6.

Ciò posto, giacchè tutti i centri delle omologie di G non possono essere distribuiti sopra le due rette p, p', esiste un centro O' posto fuori di queste rette e quindi fuori dei due piani π, π'. Allora la retta $r = OO'$ è sostegno di un gruppo diedro G_6 e la sua traccia in π è un punto A diverso da P e fuori di p, così che A, mediante le operazioni del gruppo diedro piano che si ha in π, assume 6 o 3 posizioni distinte. Si ottengono in corrispondenza 6 o 3 rette simili ad r: quest'ultimo caso si presenta solo quando r cade sopra uno dei piani delle omologie O_1, O_2, O_3; in ogni caso il piano σ determinato da due di tali rette è, come si è visto al n° 35, sostegno di un gruppo ottaedrico Δ_4^6 e la sua traccia in π passa per uno dei punti O_1, O_2, O_3 che sono i soli centri di omologie che stanno in π. Viene pertanto scartata l'ipotesi che A possa cadere sopra una delle rette che projettano da P i poli del menzionato gruppo diedro di π, perchè in tale caso si avrebbero tre rette simili ad r passanti per O e giacenti in un medesimo piano. Quindi, se trasformo

A mediante le operazioni del terzo ordine contenuto in questo gruppo diedro, i punti trasformati A, A', A'' sono i vertici di un triangolo i cui lati passano per i centri O_1, O_2, O_3 di p.

Dico che per il punto O non passano altre rette che siano sostegni di gruppi caratteristici G_6 all'infuori di quelle che vanno ai punti A, A', A''.

Infatti, giacchè non più di due di tali rette uscenti da O possono stare in un medesimo piano, le tracce in π di quattro di queste rette determinano un effettivo quadrangolo completo i cui 6 lati debbono tutti passare per i punti O_1, O_2, O_3 di p; ciò è assurdo, perchè la retta p, che non contiene nessuno dei vertici del quadrangolo, non ha meno di 4 intersezioni coi detti 6 lati. Dunque la retta r, giacchè assume tre sole posizioni, cade sopra uno dei piani delle omologie O_1, O_2, O_3.

39. Dopo ciò, si possono subito contare le omologie contenute nel gruppo G: ve ne sono 3 coi centri in π, altre 6 hanno i centri sopra le tre rette che projettano da O i tre punti A, A', A'', e precisamente due sopra ogni retta senza contare O, e finalmente deve aggiungersi l'omologia O stessa; dunque G contiene in tutto 10 omologie.

Queste omologie sono simili fra loro dentro il gruppo G, perchè quelle che generano con O gruppi diedri G_6 sono simili ad O; poi due omologie come O, O_1 tali che il centro dell'una sta nel piano dell'altra sono simili dentro il gruppo ottaedrico Δ_4^6 che si ha sul piano determinato da O e dal lato del triangolo $AA'A''$ passante per O_1.

Ora, allo scopo di determinare il grado di G, cerco con quante operazioni di G è permutabile una delle sue 10 omologie, per esempio quella di centro O.

Questa omologia è permutabile col gruppo di grado 12 generato dalle 4 omologie O, O_1, O_2, O_3: dico che non può essere permutabile con un gruppo di grado maggiore.

Infatti, in questa ipotesi, si consideri il gruppo che si ha sopra il piano π di O. Una qualsivoglia operazione S di questo gruppo non muove la retta p ed il punto P, e deve inoltre permutare fra loro i punti A, A', A'', perchè si è visto che di tali punti non ve ne sono in π più di tre. D'altra parte, giacchè questi tre punti subiscono tutte le permutazioni possibili mediante le operazioni del gruppo diedro di grado 6 che si ha in π, il prodotto di S per una conveniente operazione T di

questo gruppo diedro lascia inalterati i punti A, A', A'' ed il punto P. Allora il prodotto ST produce l'identità sopra π; quindi si ha o $ST \equiv I$ oppure $ST \equiv O$, ed in ogni caso l'operazione S appartiene al detto gruppo di grado 12.

È dunque assurdo supporre l'esistenza di altre operazioni S permutabili con O.

Segue che il grado del gruppo G è $12 \times 10 = 120$.

Un piano come OAA' che è sostegno di un gruppo ottaedrico Δ_4^6 assume soltanto 5 posizioni distinte mediante le operazioni di G, e questi 5 piani subiscono evidentemente tutte le permutazioni del gruppo simmetrico di 5 cifre mediante le operazioni ora dette.

È chiaro dunque che il gruppo G di grado 120 che qui si presenta è il gruppo pentaedrico di Klein. Esso è contenuto come sottogruppo in un gruppo di grado 7200 del § VII.

§ X. — Conchiusione.

Tutti i gruppi finiti di trasformazioni lineari dello spazio che contengono omologie di ordine maggiore di *tre* lasciano fermi un punto ed un piano, oppure trasformano in sè una coppia di rette sghembe o un tetraedro.

Prescindendo da siffatti gruppi, che io ho chiamato *impropri*, esistono soltanto *otto* gruppi *contenenti omologie*, ciascuno dei quali non lascia fermo alcun punto o coppia di rette sghembe o tetraedro.

Questi otto gruppi, che ho chiamato gruppi *propri*, sono:

I. Il noto gruppo semplice di 25920 collineazioni con 80 omologie di terzo ordine, che si presenta nella trisezione delle funzioni iperellittiche, ed è isomorfo al gruppo di Galois relativo all'equazione da cui dipende la ricerca delle 27 rette di una superficie generale del terzo ordine. Questo gruppo di collineazioni permuta 27 complessi lineari.

II. Il noto gruppo di 11520 collineazioni con 60 omologie involutorie, che è il gruppo principale delle configurazioni desmiche. Esso ha una meriedria d'indice 16 col gruppo simmetrico delle permutazioni di 6 cifre, e permuta precisamente 6 complessi lineari relativi alla superficie di Kummer generale.

III. Il gruppo di 7200 collineazioni con 60 omologie involutorie.

Esso lascia inalterata una quadrica e tutte le sue operazioni possono rappresentarsi con sostituzioni quaternarie a coefficienti reali.

IV. Un gruppo di 1920 collineazioni con 40 omologie involutorie che fa subire a sei complessi lineari le permutazioni del gruppo di SERRET di grado 120.

V. Un gruppo di 1152 collineazioni con 24 omologie involutorie il quale lascia inalterata una quadrica.

VI. Un gruppo di 576 collineazioni, contenente pure 24 omologie involutorie, che lascia inalterata una quadrica.

VII. Un gruppo di 288 collineazioni con 12 omologie involutorie che lascia pure inalterata una quadrica.

VIII. Un gruppo di 120 collineazioni con 10 omologie involutorie, che lascia inalterata una quadrica e che è oloedricamente isomorfo al gruppo simmetrico delle permutazioni di 5 cifre.

I gruppi IV e V sono contenuti come sottogruppi nel gruppo II. Il gruppo VI è un divisore di V e quindi anche di II; le sue 24 omologie non sono simili fra loro dentro il gruppo stesso, ma si scindono in due classi intransitive di 12 omologie ciascuna. I gruppi VII figurano come sottogruppi sia in un gruppo VI che in un gruppo III. I gruppi VIII figurano come sottogruppi nei gruppi III.

Finalmente tutte le collineazioni dei gruppi III, V, VI, VII, VIII si possono rappresentare con sostituzioni quaternarie di modulo 1 e — 1 ma a coefficienti *reali*. Invece i gruppi I, II, IV possono essere rappresentati con gruppi di sostituzioni quaternarie unimodulari, ma queste sostituzioni hanno *necessariamente* coefficienti immaginari.

Messina, Aprile 1904.

GIUSEPPE BAGNERA.

SUL SISTEMA DI DUE INTEGRALI PRIMI COMUNI AD UNA CLASSE DI PROBLEMI.

Nota di **Vincenzo Amato**, in Catania.

Adunanza del 28 agosto 1904.

1. In un mio recente lavoro *) ho dato un metodo per la costruzione d'un sistema di due integrali primi comuni a più problemi del moto d'un punto sopra una superficie, variabile col tempo di posizione e anche di forma, nell'ipotesi generale che la forza sollecitante dipenda dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del punto materiale di massa unitaria.

Questo metodo consiste nell'assegnare due equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1(u, r, s) = c_1, \\ A_2(u, r, s) = c_2, \end{cases}$$

con A_1, A_2 funzioni arbitrarie, tali però che sia diverso da zero il determinante funzionale rispetto alle r, s, essendo c_1, c_2 due costanti; nel risolvere le equazioni

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial r}\alpha + \frac{\partial A_1}{\partial s}\beta = 0,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} + \frac{\partial A_2}{\partial r}\alpha + \frac{\partial A_2}{\partial s}\beta = 0,$$

*) Atti dell'Accademia Gioenia, serie 4ª, vol. XVII (Nota II). Cfr. anche la mia pubblicazione negli Atti della stessa Accad., serie 4ª, vol. XIV (Nota I) nonchè la Nota *Sull'integrazione d'un'equazione* nel Giornale di Mat. di BATTAGLINI, settembre 1901. Nella presente Nota, per maggior chiarezza, sono conservate le stesse notazioni.

rispetto alle α, β e nell'assegnare infine una funzione qualunque f_1 delle variabili indipendenti t, u, r, s, tale però che sia

$$(2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial s} - \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial r} \neq 0:$$

risulta così determinata la trasformazione

$$\begin{aligned} t &= t, \\ u &= u, \\ u' &= u', \\ v &= f_1(t,\ u,\ r,\ s) \\ v' &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)u', \end{aligned}$$

mediante la quale si passa dalle variabili t, u, u', r, s alle altre t, u, u', v, v'.

Operando tale trasformazione nel sistema (1) e nella relazione (Nota I, pag. 11)

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & V - \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)U = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + 2u'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right) \\ & \quad + u'^2\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right) + \alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \beta\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)\right] \end{aligned} \right.$$

si ha un sistema di due integrali primi, funzioni delle t, u, v, u', v', comuni a tutti i problemi $(U,\ V)$ pei quali sia verificata la trasformata della (3). Per questi problemi è dunque arbitrariamente assegnabile una delle *forze* U, V, p. es. U, in funzione delle t, u, v, u', v', giacchè si ottiene la V in funzione delle stesse variabili risolvendo la trasformata della (3).

Dunque, a parte l'interpretazione meccanica, il metodo suddetto permette la costruzione di un sistema di due integrali primi, comuni a più problemi della forma

$$\frac{d^2u}{dt^2} = U\left(t,\ u,\ v,\ \frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right), \quad \frac{d^2v}{dt^2} = V\left(t,\ u,\ v,\ \frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right),$$

assegnando *a priori* questi integrali come funzioni di tre variabili u, r, s ed operando in essi una certa trasformazione, mediante la quale diventano due funzioni delle t, u, v, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$: il sistema di integrali primi che in questo modo si ottiene è comune a tutti i problemi $(U,\ V)$ della

forma suddetta, pei quali sia verificata la relazione

$$V - kU = l,$$

dove k, l sono funzioni note delle t, u, v, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$.

Si ha quindi infine, coll'applicazione del metodo suddetto, un sistema di due integrali primi ed una classe di problemi che hanno in comune tale sistema.

Senonchè si presenta una questione molto importante:

Dato un problema (U, V), *determinare, se sia possibile, una classe di problemi aventi con esso due integrali primi comuni e determinare altresì questi integrali* *).

2. Sia f_1 una funzione qualunque delle variabili indipendenti t, u, r, s; sieno inoltre α e β due funzioni arbitrarie delle u, r, s. Le f_1, α, β saranno determinate ulteriormente.

Dato un problema $[U(t, u, v, u', v'),\ V(t, u, v, u', v')]$ si ponga

$$v = f_1(t, u, r, s),$$
$$v' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)u'.$$

Allora le U, V dipenderanno dalle

$$t,\ u,\ f_1,\ u',\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)u'$$

e dovranno soddisfare alla (3).

Dunque, posto

$$V - \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)U = l,$$

è necessario prima di tutto che si abbia

$$l = A + 2Bu' + Cu'^2, \tag{4}$$

dove

$$A = (l)_{u'=0}, \qquad B = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial l}{\partial u'}\right)_{u'=0}, \qquad C = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 l}{\partial u'^2}\right)_{u'=0},$$

*) Nella Nota I (pag. 12) si considera la stessa questione, ma il procedimento (che è una generalizzazione di quello usato dal KORKINE) potrebbe riuscire di difficilissima applicazione. Va inoltre notato che in tale mio lavoro la conclusione (pag. 14), scorretta per errore del proto, deve essere intesa nel senso che, ammesso che le date forze U, V soddisfino una certa condizione, se le radici comuni a quelle due determinate equazioni soddisfano quel tale sistema di equazioni a derivate parziali, esiste una classe di problemi.

cioè

$$A = a + b\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right),$$

$$B = c + d\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right) + e\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)^2,$$

$$C = f + g\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right) + h\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)^2$$
$$+ i\left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)^3.$$

E d'altra parte

$$(5)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}, \\ B = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\right), \\ C = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\right) + \alpha\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\right) \\ \quad + \beta\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\right). \end{cases}$$

Si noti che le $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sono funzioni determinate delle

$$t,\ u,\ f_1,\ f_2\left(= \frac{\partial f_1}{\partial t}\right).$$

Dunque la questione è ridotta a determinare, se sia possibile, risolvendo il sistema (5), la funzione f_1 che verifichi la (2) e le funzioni α e β che dipendano solo dalle variabili u, r, s.

Poichè dalla prima delle (5) si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s} = \frac{1}{b}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} - a\right),$$

sostituendo nelle due equazioni rimanenti del sistema (5), alla espressione $\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\frac{\partial f_1}{\partial s}$, il secondo membro della precedente uguaglianza, si ottengono due equazioni della seguente forma

$$(6)\quad L\frac{\partial^3 f_1}{\partial t^3} + M\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right)^2 + N\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} + P\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + Q\frac{\partial f_1}{\partial t} + R = 0,$$
$$E\alpha + F\beta + G = 0.$$

I coefficienti della (6) sono funzioni note delle sole $t, u, f_1, f_2\left(= \frac{\partial f_1}{\partial t}\right)$, mentre i coefficienti E, F, G sono funzioni pure note delle

$$t, \quad u, \quad f_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial r \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial s \partial t}, \quad \frac{\partial^3 f_1}{\partial u \partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 f_1}{\partial r \partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 f_1}{\partial s \partial t^2}.$$

La determinazione che ci occupa sarà possibile se esiste una funzione $f_1(t, u, r, s)$, integrale della (6) e che soddisfi la (2), tale che si possano risolvere le due equazioni lineari

$$E\alpha + F\beta + G = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\alpha + \frac{\partial f_1}{\partial s}\beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{1}{b}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right) = 0,$$

rispetto alle α, β in modo da ottenere due funzioni delle sole u, r, s. Si avrà allora una classe di problemi dalla relazione (3), sostituendovi alle f_1, α, β le espressioni trovate e supponendo arbitraria una delle funzioni U, V.

Gl'integrali comuni al problema dato, per il quale sia verificata la (4), e a tutti quelli della classe ottenuta nel modo suddetto, saranno i due integrali del sistema (Nota II, pag. 5):

$$du = \frac{dr}{\alpha} = \frac{ds}{\beta}.$$

Per mezzo della trasformazione data in principio si potrà infine esprimere tutto in funzione delle variabili t, u, v, u', v' *).

Si può dunque in questo modo, per ogni problema (U, V) dato *a priori*, risolvere la questione enunciata nella fine del § 1.

Palermo, 27 agosto 1904.

VINCENZO AMATO.

*) Un procedimento analogo si può seguire per il sistema di due integrali primi comuni a più problemi del moto d'un punto sopra una superficie fissa, nel caso in cui la forza dipenda dalla posizione e dalla velocità del punto (Cfr. Nota II, § 2 e l'altra citata del Giornale di Matematiche di BATTAGLINI).

SOPRA ALCUNE FUNZIONI ANALOGHE ALLA FUNZIONE DI GREEN PER UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO.

Nota di **Luciano Orlando**, in Pisa.

Adunanza del 13 novembre 1904.

Alcune recenti osservazioni *) hanno mostrato che la funzione di GREEN e le analoghe per alcuni campi hanno intimo nesso coll'integrazione delle equazioni d'equilibrio elastico, nei casi che possiamo chiamare misti, o, secondo il SOMIGLIANA, alterni. Da ciò principalmente trae opportunità il presente studio.

In coordinate cartesiane ortogonali, siano $x = h_1$, $x = -h_1$, $y = h_2$, $y = -h_2$, $z = h_3$, $z = -h_3$ le rispettive equazioni delle sei facce del parallelepipedo. Se poniamo

$$r^2_{a,b,c} = [x - 2ah_1 - (-1)^a x_0]^2 + [y - 2bh_2 - (-1)^b y_0]^2 + [z - 2ch_3 - (-1)^c z_0]^2;$$

e intendiamo che x, y, z denotino le tre coordinate d'un punto A, variabile nello spazio S occupato dal parallelepipedo, poi x_0, y_0, z_0 le tre coordinate d'un polo A_0, interno a S, e che ognuna delle tre lettere a, b, c assuma tutti i valori interi, positivi e negativi, compreso zero; con ciò la grandezza $r_{0,0,0}$, che possiamo anche, senza rischio d'ambiguità, indicare soltanto con r, misura la distanza di A da A_0, e le altre $r_{a,b,c}$ misurano le distanze di A da tutti i punti dedotti da A_0 con successive immagini rispetto ai piani delle facce del parallelepipedo.

*) SOMIGLIANA, Rend. dei Lincei, 1902-1904; MARCOLONGO, ibidem., 1902 e Manuale Hoepli sull'equilibrio dei corpi elastici. Vedi anche tre miei lavori: Nuovo Cimento 1904, Giorn. di Batt. 1904.

Se t denota una ad arbitrio fra le tre lettere x, y, z, poi k corrispondentemente una delle tre lettere a, b, c, poi α corrispondentemente uno dei tre numeri 1, 2, 3, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{r_{a,b,c}} = -\frac{t - 2kh_\alpha - (-1)^k t_0}{r^3_{a,b,c}}.$$

Evidentemente questa grandezza, se k non rappresenta zero, comporta il segno di k.

Ora noi esaminiamo le espressioni

$$s_a = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{0,b,c}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{\nu,b,c}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r_{-\nu,b,c}}\right),$$

$$s_b = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_{a,0,c}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_{a,\nu,c}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r_{a,-\nu,c}}\right),$$

$$s_c = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_{a,b,0}} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_{a,b,\nu}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_{a,b,-\nu}}\right),$$

dove noi sostituiremo collo zero, ove mai si presentino, le derivate di $\frac{1}{r_{0,0,0}}$. Per esempio l'espressione s_a, che è funzione di b e di c, mancherà del primo termine quando a b e a c si attribuisca simultaneamente il valore zero.

Una semplice osservazione geometrica mostra che le serie, indicate nelle precedenti espressioni dai segni Σ, risultano formate con termini di segni alterni, di valori assoluti decrescenti. Noi potremo scrivere

$$|s_a| < \left|\frac{x - x_0}{r^3_{0,b,c}}\right| + \left|\frac{x - 2h_1 + x_0}{r^3_{1,b,c}}\right| + \left|\frac{x + 2h_1 + x_0}{r^3_{-1,b,c}}\right|,$$

$$|s_b| < \left|\frac{y - y_0}{r^3_{a,0,c}}\right| + \left|\frac{y - 2h_2 + y_0}{r^3_{a,1,c}}\right| + \left|\frac{y + 2h_2 + y_0}{r^3_{a,-1,c}}\right|,$$

$$|s_c| < \left|\frac{z - z_0}{r^3_{a,b,0}}\right| + \left|\frac{z - 2h_3 + z_0}{r^3_{a,b,1}}\right| + \left|\frac{z + 2h_3 + z_0}{r^3_{a,b,-1}}\right|.$$

Ora per μ e ν interi, non negativi, e per

$$|b| > 2\mu + 1, \qquad |c| > 2\nu + 1,$$

e per h non più grande di h_2 nè di h_3, è valida la tripla relazione, facile a verificarsi,

$$\left.\begin{matrix} r_{0,b,c} \\ r_{1,b,c} \\ r_{-1,b,c} \end{matrix}\right\} > +4h\sqrt{\mu^2 + \nu^2},$$

o anche, per una semplice osservazione d'aritmetica,

$$\left.\begin{matrix} r_{0,b,c} \\ r_{1,b,c} \\ r_{-1,b,c} \end{matrix}\right\} > 2b(\mu + \nu),$$

dunque, se formiamo la serie

$$s_{a,b} = \sum_{b=-\infty}^{\infty} s_a,$$

e prescindiamo dai termini, di valor finito, dovuti a $|b| < 3$, noi vediamo subito che questa serie è in condizioni di convergenza più favorevoli dell'altra

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^3},$$

la quale, come è noto, è convergente, se j rappresenta, come qui supponiamo, un numero non negativo. Se ora formiamo la serie

$$s_{a,b,c} = \sum_{c=-\infty}^{\infty} s_{a,b},$$

anche questa risulta in condizioni di convergenza non meno favorevoli che la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^3},$$

della quale è ben facile a riconoscersi la convergenza.

Ciò avviene comunque A varî in S.

Non è difficile vedere che, per $x = h_1$ e per $x = -h_1$, la serie $s_{a,b,c}$ assume il valore, che, nelle medesime condizioni, assume $-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}$.

Ora noi integriamo, termine a termine, rispetto alla variabile x, la serie s_a, uniformemente convergente in S, e determiniamo opportunamente *), valendoci della posizione di A_0 o di quella dei simmetrici di A_0 rispetto ai piani coordinati, il limite inferiore dell'integrazione. Chiameremo T_a quest'integrale di s_a. Poi integreremo, per termini, rispetto a x, la serie $s_{a,b}$, e ne chiameremo $T_{a,b}$ l'analogo integrale; poi ancora, nello stesso modo integreremo la serie $s_{a,b,c}$ e ne chiameremo $T_{a,b,c}$ l'integrale. Posto

$$\rho^2_{a,b,c} = 4(a^2 h_1^2 + b^2 h_2^2 + c^2 h_3^2),$$

risulta

$$T_{a,b,c} = \sum_{c=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{a,b,c}} - \frac{1}{\rho_{a,b,c}}\right).$$

*) Vedi un mio lavoro in questi Rendiconti, t. XVII (1903), pp. 335-352.

Questa serie $T_{a,b,c}$ verificherà, per $x = h_1$ o per $x = -h_1$, l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x} T_{a,b,c} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}.$$

In modo perfettamente analogo ricaveremo due altre serie $T_{b,c,a}$, $T_{c,a,b}$, che, rispettivamente per $y = h_2$ o $y = -h_2$, e per $z = h_3$ o $z = -h_3$, verificheranno le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial y} T_{b,c,a} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} T_{c,a,b} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}.$$

Ma non è difficile a provarsi la coincidenza di $T_{a,b,c}$, $T_{b,c,a}$, $T_{c,a,b}$, ed a ciò bastano alcune nozioni elementari sui limiti. Se noi dunque poniamo

$$G = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{c=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_{a,b,c}} - \frac{1}{r_{a,b,c}}\right) + \text{costante}, \quad [a^2 + b^2 + c^2 \neq 0],$$

e determiniamo opportunamente *) la costante, avremo che la G è una funzione analoga a quella di GREEN per il parallelepipedo rettangolo: quella che lascia risolvere il problema di determinare in ogni punto A_0, interno a S, il valore di una funzione armonica, della quale si conosca in ogni punto del contorno (compatibilmente con una nota condizione) il valore della derivata secondo la normale.

Le altre funzioni analoghe alla funzione di GREEN si discutono più facilmente. La

$$g = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{c=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\tau}{r_{a,b,c}} \qquad [a^2 + b^2 + c^2 \neq 0]$$

(dove τ assume il valore $p + q + r + 1$ quando a, b, c assumono rispettivamente i valori $2p$ o $2p - 1$, $2q$ o $2q - 1$, $2r$ o $2r - 1$) diventa $\frac{1}{r}$ per $x = h_1$, o per $y = h_2$, o per $z = h_3$, e fornisce la derivata secondo la normale sulle tre altre facce. La discussione relativa alla convergenza si semplifica in grazia dei segni. Ma nelle cose fin qui dette è indicata la via per determinare e discutere anche le altre; e noi non insistiamo sulla questione, la quale assume ormai l'aspetto d'un esercizio.

Marina di Caronia, settembre 1904.

LUCIANO ORLANDO.

---

*) MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, pag. 29, Hoepli, 1904.

SULLA DEFORMAZIONE DI UN SOLIDO ISOTROPO LIMITATO DA DUE PIANI PARALLELI, PER TENSIONI SUPERFICIALI DATE.

Nota di **Luciano Orlando**, in Pisa.

Adunanza del 13 novembre 1904.

I varî casi della deformazione elastica di un solido isotropo limitato da due piani paralleli sono già stati sapientemente discussi *), ma non mi pare inopportuna arroganza trattarne, come farò nel presente lavoro, uno, fra i più difficili e notevoli, con un metodo fondato su concetti assolutamente elementari.

Supponiamo che il solido S in esame non sia cimentato da forze di massa, e che si conosca la tensione unitaria che agisce in ogni elemento della superficie. Noi chiamiamo σ_1 e σ_2 i due piani limiti, di equazioni $z = h$ e $z = -h$ rispetto a una terna ortogonale cartesiana xyz opportunamente fissata. Il problema che noi risolveremo consiste nel determinare in un punto generico A_0, di coordinate x_0, y_0, z_0, interno a S, le componenti u, v, w dello spostamento elastico.

Sia A_{2i+1} il punto simmetrico di A_{2i} rispetto a σ_1, e A_{2i+2} quello di A_{2i+1} rispetto a σ_2, dove i assume i valori 0, 1, 2, 3, ... ; e, scambiando l'ufficio di σ_1 e di σ_2, si ricavino da A_0, con analoghe simmetrie, i punti A'_{2i+1}, A'_{2i+2}. Se chiamiamo r la distanza da A_0 di un punto variabile A, di coordinate x, y, z, e in generale r_ν ed r'_ν le rispettive distanze dello stesso punto A da A_ν e da A'_ν, sarà facile avere le espressioni analitiche di queste lunghezze.

*) CERRUTI, Rend. dei Lincei, 1884; SOMIGLIANA, Nuovo Cimento, 1885-86; TEDONE, Annali di Matematica, 1904.

Per non ripetere ragionamenti lunghi, noi ammettiamo di saper risolvere i problemi di DIRICHLET colle seguenti formule

$$4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\int \varphi\left(\frac{1}{r} - G_1\right) d\sigma_1 - \int \varphi\left(\frac{1}{r} - G_1\right) d\sigma_2\right] - \int\left(\frac{1}{r} - G_1\right)\Delta_2\varphi\, dS,$$

$$4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0) = \int\left(G - \frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi}{dn} d\sigma_1 + \int\left(G - \frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi}{dn} d\sigma_2 - \int\left(\frac{1}{r} - G\right)\Delta_2\varphi\, dS,$$

$$4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0) = \int \varphi\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r} - g_1\right) d\sigma_1 - \int\left(\frac{1}{r} - g_1\right)\frac{d\varphi}{dn} d\sigma_2 - \int\left(\frac{1}{r} - g_1\right)\Delta_2\varphi\, dS,$$

$$4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0) = \int\left(g_2 - \frac{1}{r}\right)\frac{d\varphi}{dn} d\sigma_1 - \int \varphi\frac{d}{dn}\left(g_2 - \frac{1}{r}\right) d\sigma_2 - \int\left(\frac{1}{r} - g_2\right)\Delta_2\varphi\, dS,$$

dove le integrazioni sono fatte in $dx\,dy$ e in $dx\,dy\,dz$, e rispettivamente estese a σ_1, a σ_2, a S. Le funzioni G_1, G, g_1, g_2 sono date da

$$G_1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r'_3} - \cdots$$

$$G = \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{r'_1}\right) + \left(\frac{1}{4h} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{4h} - \frac{1}{r'_2}\right) + \left(\frac{1}{6h} - \frac{1}{r_3}\right) + \left(\frac{1}{6h} - \frac{1}{r'_3}\right) + \cdots$$

$$g_1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} - \cdots - \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{r'_3} - \frac{1}{r'_4} - \frac{1}{r'_5} + \cdots$$

$$g_2 = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r'_3} - \frac{1}{r'_4} + \frac{1}{r'_5} + \frac{1}{r'_6} - \cdots - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5} + \cdots$$

Di queste formule estesamente si parla in tre miei lavori *).

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1903; Nuovo Cimento, 1904; Giornale di Battaglini, 1904.

Per adoperare la formula del Betti, approfittando così del metodo della deformazione ausiliare affermato poi dal Cerruti *), noi risolveremo il problema di determinare le componenti ξ, η, ζ d'una deformazione determinata da assenza di forze di massa e dai valori delle componenti di tensione

$$L = -2\mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}, \qquad M = -2\mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}, \qquad N = -2\mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

relative ai punti di σ_1, e dalle tre altre, relative ai punti di σ_2,

$$L = 2\mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}, \qquad M = 2\mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}, \qquad N = 2\mu \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}.$$

In queste espressioni, μ denota il modulo di rigidità del corpo isotropo; quando sarà necessaria, adopereremo anche l'altra costante λ **).

È chiaro che per i punti della superficie vale l'equazione

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

la quale mostra che per ogni punto di σ_1 dev'essere

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -2\mu \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial z^3},$$

e per quelli di σ_2

$$\frac{\partial N}{\partial z} = 2\mu \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial z^3}.$$

Con questi dati, a somiglianza di ciò che abbiamo fatto per il semispazio in una precedente Nota ***), noi possiamo determinare la funzione biarmonica N in un punto generico A, di coordinate x, y, z, in S. Qui non è così facile il calcolo: se il solido si protraesse indefinitamente da quella parte dalla quale è invece limitato da σ_2, noi saremmo

*) *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Memorie dei Lincei, 1882.

**) Per tutto ciò che adoperiamo senza minute specificazioni, il lettore può riferirsi ai trattati classici del Love, del Cesàro, e all'altro, recentissimo, non meno eccellente, del Marcolongo.

***) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVIII (1904).

in quel caso, e troveremmo per N la funzione

$$-2\mu\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} - 2(z-h)\frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial z^3}\right);$$

ma questa funzione, atta come la sua derivata a verificare le condizioni imposte nei punti di σ_1, non verifica quelle relative ai punti di σ_2. Per correggerla, noi supponiamo ora che il solido sia limitato soltanto da σ_2 e che si protenda all'infinito dalla parte di σ_1. Con successive compensazioni, noi troveremo una serie convergente, che esprimerà la funzione biarmonica N.

Queste successive correzioni dipendono dal problema della Δ_4 per il semispazio, ed è forse bene richiamarne qui la soluzione. Se di una funzione regolare φ, che in ogni punto del semispazio verifica la $\Delta_4\varphi = 0$, è noto, sul piano limite di equazione $z = z_1$, il valore φ e il valore $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, noi porremo

$$\varphi = H_1 + (z - z_1) H_2,$$

dove le due funzioni H_1 e H_2 sono due funzioni armoniche. Per determinarle noi abbiamo le due condizioni superficiali

$$\varphi = H_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial z} + H_2.$$

La prima determina, con notissima formula, la funzione H_1, e poi la seconda determina subito H_2. Con successive risoluzioni di questo problema, semplificate dal metodo delle immagini, e col processo d'induzione, noi siamo giunti a esprimere $N(x, y, z)$. Questi calcoli sono laboriosi, e noi perciò daremo il risultato, limitandoci a verificarlo, ma chi volesse effettivamente eseguire quanto abbiamo accennato non troverebbe alcuna difficoltà teorica, e farebbe un utile esercizio.

Trovano qui posto alcune osservazioni necessarie. Se $a_{i,j}$ denota l'elemento della linea i^{ma} e della colonna j^{ma} del seguente quadro aritmetico

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	46	...
1	5	15	35	70	116	...
1	6	21	46	116	180	...
..	..	..	..	..	..	...

il quale si continua secondo la relazione $a_{1,i} = a_{j,1} = 1$, e secondo l'altra

(1) $$a_{i-1,j} + a_{i,j-1} = a_{i,j},$$

si deduce subito

(2) $$a_{1,j} + a_{2,j} + a_{3,j} + \cdots + a_{i,j} = a_{i,j+1}.$$

Dimostriamo ancora che è, per i e per j maggiori di 1,

(3) $$a_{i,j+1} < i^j.$$

Si ha, infatti, per ogni intero positivo ν minore di j,

$$\binom{j}{\nu} > \binom{j-1}{\nu-1},$$

e perciò

$$\binom{j}{1}(i-1)^{j-1} + \binom{j}{2}(i-1)^{j-2} + \cdots > (i-1)^{j-1} + \binom{j-1}{1}(i-1)^{j-2} + \cdots;$$

se ne deduce

$$i^{j-1} = [(i-1)+1]^{j-1} < \binom{j}{1}(i-1)^{j-1} + \binom{j}{2}(i-1)^{j-2} + \cdots$$

Ma la seconda parte della disuguaglianza è lo sviluppo di

$$[(i-1)+1]^j - (i-1)^j = i^j - (i-1)^j,$$

dunque risulta

(4) $$(i-1)^j + i^{j-1} < i^j.$$

E, se per i numeri del quadro precedenti ad $a_{i,j+1}$ ammettiamo che la (3) sia, come per i primi è visibile, verificata, ed applichiamo il criterio d'induzione, tenendo presente la (4) e la (1), noi dimostriamo la validità della (3) per tutti i numeri del quadro.

Da (2) e (3) si deduce la relazione utile

(5) $$a_{i,j+2} < 1 + 2^j + 3^j + \cdots + i^j.$$

Dobbiamo ancora stabilire un lemma d'aritmetica, dimostrando che la serie

$$T = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + 2^{2p} + 3^{2p} + \cdots + p^{2p}}{p^{2p+1+\alpha}},$$

dove α è un numero positivo indipendente da p, è una serie convergente.

Per questo poniamo

$$u_\nu = \nu^{2p},$$

valevole per tutti i valori interi positivi di ν non superiori a $2p$, e os-

serviamo che è

$$\frac{u_{\nu-1}}{u_\nu}=\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right]^{\frac{2p}{\nu}}.$$

Ora è visibile la validità della relazione

$$\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^\nu<1,$$

dalla quale, se dividiamo prima e seconda parte per la quantità positiva maggiore di 2

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu,$$

otteniamo

$$\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu<\frac{1}{2},$$

onde

$$\frac{u_{\nu-1}}{u_\nu}<\frac{1}{2},$$

e poi successivamente analoghe relazioni, per le quali scriveremo

$$u_{\nu-1}<\frac{u_\nu}{2},\qquad u_{\nu-2}<\frac{u_\nu}{2^2},\ \cdots,\ u_1<\frac{u_\nu}{2^{\nu-1}}.$$

Si ottiene

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_\nu<2u_\nu.$$

Ciò mostra che il termine generale di T non supera $\frac{2}{p^{1+\alpha}}$, e stabilisce, come è noto, che T è convergente. La convergenza della serie doppia

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+2^{2n-1}+\cdots+m^{2n-1}}{(n+m-1)^{2n+1+\alpha}}$$

si è resa ora evidente.

Ora osserviamo che le grandezze r_{2n+1}, r_{2n+2}, r'_{2n+1}, r'_{2n+2}, dianzi definite, non sono inferiori a $4nh$, e che la derivata ν^{ma} di $\frac{1}{r_i}$ o di $\frac{1}{r'_i}$ non supera $\frac{1}{r_i^{\nu+1}}$ o $\frac{1}{r_i'^{\nu+1}}$. Per abbreviare, possiamo dire una cosa molto facile poi a verificarsi, che cioè queste premesse basteranno ad assicurare la convergenza, uniforme in S ed assoluta, delle serie che adopereremo.

Intanto noi poniamo

$$s_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{a_{m,2n+1}\left[\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}-2(z-h)\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}-\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\frac{1}{r_{2n+2m}}\right](4h)^{2n}$$
$$+a_{m,2n+2}\left[\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m}}-2(z+h)\frac{\partial^{2n+4}}{\partial z^{2n+4}}\frac{1}{r_{2n+2m}}+\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m+1}}\right](4h)^{2n+1}\Big\},$$

e chiamiamo s_2 un'altra serie doppia che si deduce da s_1 col mutamento di h in $-h$ (con che r_ν diventa r'_ν). Per $z=h$, le grandezze r_{2i} ed r_{2i+1} diventano uguali fra di loro, come anche le derivate d'indice pari su z; e il termine

$$(4h)^{2n}\left[a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}-a_{m-1,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\frac{1}{r_{2n+2(m-1)}}\right]$$
$$-a_{m,2(n-1)+2}\frac{\partial^{2(n-1)+4}}{\partial z^{2(n-1)+4}}\frac{1}{r_{2(n-1)+2m}}(4h)(4h)^{2(n-1)+1}$$

è nullo, come si vede per intervento della relazione (1), finchè m ed n assumano tali valori che i numeri $m-1$ ed $n-1$ siano compresi nella serie. Rimane dunque isolato il termine dovuto a $m=1$, $n=0$, cioè $\dfrac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2}$, che per $z=h$ vale quanto $\dfrac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}$. Le derivate d'indice dispari su z presentano segni opposti e annullano, come si vede, i rimanenti termini, oltre quelli che hanno il fattore $z-h$, i quali si annullano appunto per questo fattore. La serie s_1 può derivarsi rispetto a z indefinitamente, termine a termine, come risulta dalle precedenti osservazioni, e anche rispetto a x e ad y può indefinitamente derivarsi. Con ciò si vede chiaro che s_1 è una funzione biarmonica. La derivata di s_1 su z presenta, per $z=h$, il termine

$$-(4h)^{2n}\left[a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}+a_{m-1,2n+1}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2(m-1)}}\right]$$
$$-a_{m,2(n-1)+2}\frac{\partial^{2(n-1)+5}}{\partial z^{2(n-1)+5}}\frac{1}{r_{2(n-1)+2m}}(4h)(4h)^{2(n-1)+1},$$

il quale è nullo, per tutti i valori di m e di n, tranne che per $m=1$, $n=0$, nel quale caso diventa $-\dfrac{\partial^3\frac{1}{r_1}}{\partial z^3}$ o anche $\dfrac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial z^3}$. Gli altri termini, come è quasi evidente, scompaiono. Per $z=-h$, figura in s_1, oltre quelli che evidentemente scompaiono, il termine

$$(4h)(4h)^{2n}a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}$$
$$+\left[a_{m,2n+2}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m}}+a_{m-1,2n+2}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2(m-1)+1}}\right](4h)^{2n+1},$$

il quale è nullo. Parrebbe che si presentasse un'eccezione per $m = 1$, ma non si presenta, perchè $a_{1,2n+1}$ e $a_{1,2n+2}$ sono uguali fra di loro, ed è 1 il valore comune di questi due numeri, com'è già stato stabilito. Nella derivata su z un termine da osservarsi attentamente è

$$(4h)(4h)^{2n} a_{m,2n+1} \frac{\partial^{2n+4}}{\partial z^{2n+4}} \frac{1}{r_{2n+2m-1}}$$

$$+\left[-a_{m,2n+2}\frac{\partial^{2n+4}}{\partial z^{2n+4}}\frac{1}{r_{2n+2m}} + a_{m-1,2n+2}\frac{\partial^{2n+4}}{\partial z^{2n+4}}\frac{1}{r_{2n+2(m-1)+1}}\right](4h)^{2n+1},$$

il quale, come l'altro dianzi esaminato, è sempre nullo.

Come si comporta s_1 rispetto ai piani σ_1 e σ_2, così, corrispondentemente, si comporterà s_2 rispetto ai piani σ_2 e σ_1.

Da tutto quello che finora è stato detto noi giungiamo a desumere che, se poniamo

$$N(x, y, z) = 2\mu(s_2 - s_1),$$

noi avremo, nel punto generico A, di coordinate x, y, z, determinato la funzione biarmonica N, conformemente colle condizioni superficiali già imposte.

La funzione N è un elemento della deformazione ausiliare, ma poco potrebbe servirci se non avessimo il modo di calcolare gli altri elementi. Dall'equazione indefinita

$$N = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{6}$$

dove θ denota la dilatazione cubica, ricaviamo

$$\Delta_2(s_1 - s_2) = \frac{\partial}{\partial z}\Delta_2\zeta,$$

e poi, per la terza equazione indefinita d'equilibrio,

$$\Delta_2(s_1 - s_2) = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}.$$

Ma è facile riconoscere che lo sviluppo del primo membro è una serie integrabile due volte, termine a termine, rispetto a z. La funzione arbitraria di x, y, che dovrebbe comparire in ogni integrazione, è nulla, perchè è armonica rispetto a x e y, ed è, come si capisce subito, nulla all'infinito. Si ottiene

$$\theta = \frac{4\mu}{\lambda+\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\left(\frac{1}{r_{2n+2m-1}} - \frac{1}{r'_{2n+2m-1}}\right)(4h)^{2n}\right.$$

$$\left. + a_{m,2n+2}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\left(\frac{1}{r_{2n+2m}} + \frac{1}{r'_{2n+2m}}\right)(4h)^{2n+1}\right].$$

Ora noi determineremo $\zeta(x, y, z)$. Questa funzione potrà risultare come somma di due altre funzioni, una delle quali, $\boldsymbol{A}_3$, sia, armonica, e l'altra verifichi l'equazione

$$\Delta_2 \boldsymbol{B}_3 = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

È chiaro che possiamo porre

$$\boldsymbol{B}_3 = -2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[(z-h)a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}} - (z+h)a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}\frac{1}{r'_{2n+2m-1}}\right](4h)^{2n}\right.$$
$$\left. + \left[(z+h)a_{m,2n+2}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r_{2n+2m}} + (z-h)a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}}\frac{1}{r'_{2n+2m-1}}\right](4h)^{2n+1}\right\},$$

e ci rimane da determinare $\boldsymbol{A}_3$. Questa determinazione non è difficile. L'equazione (6), dianzi richiamata, mostra che la parte armonica di $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ si compone di $-\frac{\lambda}{2\mu}\theta$ e della parte armonica, che chiameremo $\boldsymbol{H}$, contenuta in $s_1 - s_2$. Chiameremo ancora $\boldsymbol{K}$ la parte armonica di $\frac{\partial \boldsymbol{B}_3}{\partial z}$. Da (6) dunque risulta

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}_3}{\partial z} = -\boldsymbol{K} - \frac{\lambda}{2\mu}\theta + \boldsymbol{H}.$$

Sviluppando il secondo membro, e, come dianzi, integrando per termini, e annullando la funzione armonica che parrebbe arbitraria, poi sommando $\boldsymbol{A}_3$ con $\boldsymbol{B}_3$, avremo $\zeta(x, y, z)$. Per determinare anche $\xi(x, y, z)$ ed $\eta(x, y, z)$, porremo ξ uguale alla somma di $\boldsymbol{A}_1$ con $\boldsymbol{B}_1$, ed η uguale alla somma di $\boldsymbol{A}_2$ con $\boldsymbol{B}_2$, fissando che $\boldsymbol{A}_1$ e $\boldsymbol{A}_2$ siano armoniche, e che invece $\boldsymbol{B}_1$ e $\boldsymbol{B}_2$ verifichino le relazioni

$$\Delta_2 \boldsymbol{B}_1 = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad \Delta_2 \boldsymbol{B}_2 = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Noi potremo senz'altro ricavare $\boldsymbol{B}_1$ e $\boldsymbol{B}_2$ da $\boldsymbol{B}_3$ mutando una derivazione in ∂z in una derivazione in ∂x o, rispettivamente, in ∂y, e le $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, così determinate, evidentemente verificheranno la relazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{B}_2}{\partial x} = 0.$$

Ma dalle equazioni

$$\boldsymbol{L} = -\mu\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \qquad M = -\mu\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),$$

delle quali i primi membri sono, in superficie, noti, si ricava che nei punti della superficie vale l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)=0,$$

la quale, per la precedente relazione fra B_1 e B_2, dà origine all'altra

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)=0,$$

onde con facile criterio, già adoperato, si deduce l'equazione indefinita

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}=0.$$

Questa e la seguente

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}=\theta-\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

inducono a scrivere

$$\begin{aligned}
=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{ a_{m,2n+1}&\left[\varepsilon\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t\partial z^{2n}}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}-2(z-h)\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial t}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}-\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t\partial z^{2n}}\frac{1}{r_{2n+2m}}\right](4h)^{2n}\\
{}_{m,2n+2}&\left[\varepsilon\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial t}\frac{1}{r_{2n+2m}}-2(z+h)\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+2}\partial t}\frac{1}{r_{2n+2m}}+\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial t}\frac{1}{r_{2n+2m+1}}\right](4h)^{2n+1}\\
{}_{m,2n-1}&\left[\varepsilon\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t\partial z^{2n}}\frac{1}{r'_{2n+2m-1}}-2(z+h)\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial t}\frac{1}{r'_{2n+2m-1}}-\frac{\partial^{2n+1}}{\partial t\partial z^{2n}}\frac{1}{r'_{2n+2m}}\right](4h)^{2n}\\
{}_{m,2n+2}&\left[\varepsilon\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial t}\frac{1}{r'_{2n+2m}}-2(z-h)\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+2}\partial t}\frac{1}{r'_{2n+2m}}+\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial t}\frac{1}{r'_{2n+2m+1}}\right](4h)^{2n+1}\Big\},
\end{aligned}$$

dove t denota una ad arbitrio fra le tre variabili x, y, z; poi τ la corrispondente fra le tre funzioni ξ, η, ζ; e poi ε denota 1 se t denota z, e -1 se t denota x o y.

Ragioni di rigore ci consigliano di verificare l'equazione

$$-2\mu\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}=-\mu\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right),$$

valida sopra σ_1, e le altre equazioni ai limiti, con questi valori ξ, η, ζ che qui assegniamo. Le equazioni indefinite si verificano subito. Noi insisteremo, come prima, soltanto nei punti meno chiari. Il termine

$$-2(4h)^{2n}\left[a_{m,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial x}\frac{1}{r_{2n+2m-1}}+a_{m-1,2n+1}\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+1}\partial x}\frac{1}{r_{2n+2(m-1)}}\right]$$
$$-2a_{m,2(n-1)+2}\frac{\partial^{2(n-1)+4}}{\partial z^{2(n-1)+3}\partial x}\frac{1}{r_{2(n-1)+2m}}(4h)(4h)^{2(n-1)+1},$$

scompare sempre, con tutti gli altri provenienti dalle medesime parentesi,

tranne che per $n = 0$ ed $m = 1$; rimane $-2\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial z}$ cioè $2\dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}$.
Esaminiamo che avvenga del termine

$$2(4h)(4h)^{2n} a_{m,2n+1} \frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+2} \partial x} \frac{1}{r'_{2n+2m-1}}$$
$$+2\left[-a_{m,2n+2} \frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+2} \partial x} \frac{1}{r'_{2n+2m}} + a_{m-1,2n+2} \frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+2} \partial x} \frac{1}{r'_{2n+2(m-1)+1}}\right](4h)^{2n+2},$$

il quale si ricava dalle successive parentesi. È facile vedere, dopo quello che dianzi abbiamo esaminato, che anche questo termine è nullo senza eccezioni. Che siano nulli gli altri è poi quasi evidente, e l'equazione superficiale, valida sopra σ_1, che era da verificarsi, è verificata. In modo analogo si verificano le altre.

Ora la dilatazione cubica Θ della particella che intornia il punto generico A_0, di coordinate x_0, y_0, z_0, nella deformazione effettiva, è subito data, in funzione delle tensioni superficiali, dalla formula del BETTI, troppo nota perchè ci sia necessario qui scriverla. Chiamando φ_3 il valore di $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ che si ricava, in superficie, dall'equazione canonica

$$Z_z = -\lambda\Theta - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

e chiamando φ_1 e φ_2 rispettivamente i valori di $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, $\dfrac{\partial v}{\partial z}$, forniti dalle due altre

$$X_z = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad Y_z = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

avremo

$$4\pi u(x_0, y_0, z_0) = \int\left(G - \frac{1}{r}\right)\varphi_1 d\sigma + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\int\left(\frac{1}{r} - G\right)\frac{\partial\Theta}{\partial x} dS,$$
$$4\pi v(x_0, y_0, z_0) = \int\left(G - \frac{1}{r}\right)\varphi_2 d\sigma + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\int\left(\frac{1}{r} - G\right)\frac{\partial\Theta}{\partial y} dS,$$
$$4\pi w(x_0, y_0, z_0) = \int\left(G - \frac{1}{r}\right)\varphi_3 d\sigma + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\int\left(\frac{1}{r} - G\right)\frac{\partial\Theta}{\partial z} dS,$$

dove le integrazioni, fatte in $dx\,dy$ e, rispettivamente, in $dx\,dy\,dz$, si estendono a tutto il contorno σ o a tutto lo spazio S.

Gl'integrali che qui figurano e quelli della formula del BETTI, onde si trae Θ, si estendono a campi infiniti. Ciò impone ai dati superficiali

alcune limitazioni. Non sarebbe difficile discuterle, ma noi ci siamo dilungati già abbastanza, e preferiamo ammettere d'aver dato un modo di risolvere il problema della deformazione quando i dati siano tali che non sia dubbio l'equilibrio elastico del corpo.

Marina di Caronia, agosto 1904.

LUCIANO ORLANDO.

SULLA DEFORMAZIONE DI UN SOLIDO ISOTROPO LIMITATO DA DUE PIANI PARALLELI, PER TENSIONI SUPERFICIALI DATE.

NOTA ADDIZIONALE *)

di **Luciano Orlando**, in Pisa.

Adunanza dell'8 gennajo 1905.

Nella Nota alla quale mi riferisco io chiamo *evidente* la convergenza della serie doppia

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \cdots + m^{2n-1}}{(n + m - 1)^{2n+1+\alpha}},$$

dove α denota un numero positivo arbitrario. Io credo ora, invece, di riparare a una biasimevole omissione dimostrando questa convergenza.

Stabiliamo anzitutto la formula

$$(1) \qquad 1 + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \cdots + m^{2n-1} < \frac{(m+1)^{2n}}{n}.$$

La validità di questa formula è chiara per $m = 1$. È anche facile osservare che vale, generalmente, l'inuguaglianza

$$m^{2n} + n m^{2n-1} < (m+1)^{2n};$$

basta, per verificarla, sviluppare il secondo membro colla formula del binomio. Verificata questa formula, se ne deduce la validità dell'altra

$$(2) \qquad \frac{(m+1)^{2n} - m^{2n}}{n} > m^{2n-1}.$$

Se noi, dunque, ammettiamo d'aver già verificato la (1) fino a $m - 1$, ammettendo con ciò che sia valida l'inuguaglianza

$$1 + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \cdots + (m-1)^{2n-1} < \frac{m^{2n}}{n},$$

e teniamo conto di (2), noi dimostriamo generalmente la (1).

*) Vedi questi Rendiconti, t. XIX (1905), pp. 66-77.

Ciò mostra che, se è convergente la serie doppia

$$V=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(m+1)^{2n}}{n}}{(n+m-1)^{2n+1+\alpha}},$$

è convergente anche la U. Ma la V si compone della serie convergente

$$V_1=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)^2}{m^{3+\alpha}}$$

e dell'altra serie

$$\begin{aligned}V_2=\frac{2^4}{2.2^{5+\alpha}}+\frac{3^4}{2.3^{5+\alpha}}+\frac{4^4}{2.4^{5+\alpha}}+\frac{5^4}{2.5^{5+\alpha}}+\cdots\\
+\frac{2^6}{3.3^{7+\alpha}}+\frac{3^6}{3.4^{7+\alpha}}+\frac{4^6}{3.5^{7+\alpha}}+\cdots\\
+\frac{2^8}{4.4^{9+\alpha}}+\frac{3^8}{4.5^{9+\alpha}}+\cdots\\
+\frac{2^{10}}{5.5^{11+\alpha}}+\cdots\\
+\cdots,\end{aligned}$$

la quale è convergente, con sicurezza, se è convergente la serie

$$\begin{aligned}W=\frac{1}{2.2^{1+\alpha}}+\frac{1}{2.3^{1+\alpha}}+\frac{1}{2.4^{1+\alpha}}+\frac{1}{2.5^{1+\alpha}}+\cdots\\
+\frac{1}{3.3^{1+\alpha}}+\frac{1}{3.4^{1+\alpha}}+\frac{1}{3.5^{1+\alpha}}+\cdots\\
+\frac{1}{4.4^{1+\alpha}}+\frac{1}{4.5^{1+\alpha}}+\cdots\\
+\frac{1}{5.5^{1+\alpha}}+\cdots\\
+\cdots,\end{aligned}$$

perchè ogni termine di W non è inferiore al termine di uguale posto in V_2. Ma noi possiamo scrivere

$$W=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{1+\alpha}}.$$

Ora, se β è un numero positivo minore di α, avremo

$$\lim_{n=\infty} n^{1+\beta}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{1+\alpha}}=\lim_{n=\infty}\frac{\log n}{n^{\alpha-\beta}}=0.$$

Ciò dimostra la convergenza di W, di V, e di U.

Rimane dunque inutile l'esame della serie T della mia Nota. Ivi, per esattezza, bisogna porre $\sum\limits_{p=1}^{\infty}$ e non $\sum\limits_{p=0}^{\infty}$. Bisogna anche mutare i numeri 46, 116, e 180, del quadro aritmetico, rispettivamente in 56, 126, 252. Alle citazioni dei lavori sul solido isotropo limitato da due piani paralleli bisogna aggiungere quella del lavoro del Prof. TEDONE, inserito nel tomo XVIII (1904), pp. 368-385, di questi Rendiconti.

Pisa, 26 dicembre 1904.

L. ORLANDO.

LA GEOMETRIA D'OGGIDÌ E I SUOI LEGAMI COLL'ANALISI.

Discorso di **Corrado Segre**, in Torino;

pronunciato a Heidelberg, il 13 agosto 1904, nella 3ª adunanza generale del III° CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI.

Dalle *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg; II. Teil (Wissenschaftliche Vorträge)*, pp. 109-120 *).

Voi conoscete il volumetto che l'Università di Kolozsvár ha pubblicato due anni sono, pel centenario della nascita di GIOVANNI BOLYAI **). Ne sono parte precipua una memoria di L. SCHLESINGER sulle applicazioni della geometria assoluta alla teoria delle funzioni di variabile complessa, ed un'altra di P. STÄCKEL sulla meccanica analitica in relazione colle varietà di più dimensioni ***). Così alla glorificazione del grande geometra ungherese prendevano parte l'Analisi e la Meccanica!

A me parve di vedere in ciò un nuovo indizio dei sentimenti fraterni che vanno sempre più legando fra loro i vari rami della Matematica!

Per quel che riguarda la Meccanica, non occorre che io dica quanta parte abbia e debba avere in essa la Geometria! Solo mi permetterò di ricordarvi, a proposito della Geometria moderna, una rappresentazione di grande importanza suggestiva, a cui ormai, dopo l'esempio dato da HERTZ, tutti i cultori della Meccanica ricorrono liberamente. Voglio dire la rappresentazione di un sistema mobile con n gradi di libertà per mezzo di un punto dello spazio ad n o a $2n$ dimensioni. Indicando la forza viva con $\frac{ds^2}{dt^2}$, il problema del moto equivale a quello geometrico

*) Col gentile consenso del redattore Professore A. KRAZER.

**) JOANNIS BOLYAI *in memoriam*.

***) V. anche STÄCKEL, *Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten* [Jahresb. d. Deutschen Math.-Verein. XII (1903), p. 469].

delle geodetiche di uno spazio ad n dimensioni, in cui ds sia l'elemento lineare!

Quanto ai legami che stringono la Geometria e l'Analisi, si può dire che essi derivano principalmente da ciò che *in molta parte gli oggetti di cui esse si occupano sono gli stessi*, almeno in un senso astratto! Dicendo così, io non alludo soltanto a quei campi che tutti riconoscono esser comuni alle due scienze: come, ad esempio, la teoria dei gruppi e quella degli aggregati (*ensembles, Mengen*). Io penso ad un'identità molto più larga, che solo è nascosta in parte dalla differenza dei nomi. Così quello che l'analista chiama una *funzione* $y = f(x)$, il geometra considera come *curva* $y = f(x)$, o come *corrispondenza* fra il punto x e il punto y. Ciò che l'analista chiama *equazione differenziale* sarà pel geometra una certa *varietà di elementi* nel senso di SOPHUS LIE. E i gruppi di *trasformazioni lineari* usati nello studio delle funzioni automorfe da POINCARÉ e KLEIN, e poi dai loro successori, si posson considerare come particolari gruppi di *movimenti* non-euclidei. Persino il concetto primitivo di *punto* si può riguardare come comune alla Geometria ed all'Analisi: poichè in molta parte della Geometria d'oggidì i punti si posson concepire in modo puramente numerico, come si fa, ad esempio, nella teoria degli aggregati o in quella delle funzioni!

La differenza fra Geometria ed Analisi consiste invece, talvolta nei *problemi* che esse pongono, più spesso nei *metodi* con cui esse li trattano. Ed è appunto collo scambiarsi fra loro i problemi, e col prestarsi reciprocamente l'ajuto dei rispettivi metodi, che le due scienze sorelle rendono l'una all'altra servizî immensi!

L'identità che ho accennato fra gli oggetti della Geometria moderna e quelli dell'Analisi si collega ad un carattere spiccatissimo che la Geometria è andata acquistando sempre più. Questo carattere, da cui son derivati i maggiori progressi di quella scienza, è *la grande generalità ed astrazione nei concetti e nelle proposizioni*.

A prova di ciò non occorre che io ricordi l'estensione che s'è fatta coll'aggiungere agli elementi geometrici reali quelli imaginari, nè l'altra che accanto alle linee e superficie pose i sistemi comunque infiniti di linee o superficie, i connessi, e così via. E nemmeno occorre che io vi parli della geometria degli spazî a più dimensioni, nella quale tanto si è lavorato nell'ultimo ventennio, e che tanto ha contribuito ad ampliare

il campo d'azione dei matematici! Ma scendendo invece dalle vette della scienza alle sue basi, noi vediamo che appunto la detta astrazione si trova nei più recenti lavori sui *fondamenti della geometria* di PEANO, VERONESE, PIERI, come in quelli di HILBERT e della sua scuola. In fatti essi svolgono la geometria in modo esclusivamente deduttivo, senz'alcun ricorso all'intuizione spaziale (*räumliche Anschauung*): cosicchè le parole *punto, retta, movimento*, ecc. non esigono più l'interpretazione consueta, ma possono riceverne parecchie, diverse fra loro, di qualsiasi natura, per esempio puramente aritmetiche, purchè soddisfacciano al sistema di postulati o definizioni che furon posti. In questo modo, accanto alle due geometrie non-euclidee di qualche tempo addietro, son divenute possibili in questi ultimi anni tutta una serie numerosa di nuove geometrie!

Questa moltiplicità d'interpretazioni per gli elementi geometrici, che incontriamo tanto nel moderno indirizzo di studio dei fondamenti, quanto in un modo ben noto di concepire gli spazî a più dimensioni, presenta grande utilità. Grazie ad essa ogni risultato si traduce in infiniti nuovi risultati, immediatamente! Qualcosa di simile si ha nella meccanica moderna, quando si parla di problemi dinamici *equivalenti*, sebbene si riferiscano a sistemi molto diversi.

Alcuni hanno obiettatò, anche ultimamente *), che, quando gli enti geometrici vengono concepiti in modo così astratto, oppure quando vengon trattati solo con metodo logico-deduttivo, senza ricorrere alle figure, alla intuizione spaziale, non si fa più *vera geometria!* Possiamo dire, o Signori, che questa è solo una quistione di parole! Ma si può anche dire che l'ampliarsi della Geometria ha fatto passare l'intuizione spaziale, che una volta era per essa un elemento indispensabile, in seconda linea. Chi mai può concepire nella sua mente un connesso, oppure lo spazio di punti imaginari che STAUDT ha studiato sinteticamente? Così l'intuizione spaziale ha cessato di essere necessaria. E ciò invece che caratterizza la Geometria d'oggidì è, come già accennavo, la forma dei suoi problemi o dei suoi ragionamenti **)!

---

*) V. ad esempio E. B. WILSON, *The so-called Foundations of Geometry* [Archiv d. Math. u. Phys. (3), VI (1903), p. 104].—Del resto questo articolo ha pienamente ragione, quando raccomanda di guardarsi dalle esagerazioni, dalle *manie*.

**) Cfr. anche il mio articolo: *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche* [Rivista di mat., I (1891)]; ristampato ora in inglese nel Bull. Amer. Math. Society (2) X (1904).—Veggasi pure E. STUDY, *Geometrie der Dynamen* (Leipzig 1903), ove, a pag. 271, sono esposte delle idee che si accordano pienamente colle mie.

E a proposito dei metodi geometrici, permettetemi che io vi dica anche il mio pensiero intorno ad un'accusa che a loro vien fatta talvolta: cioè di *poco rigore*. Già nel Congresso Internazionale di Parigi HILBERT aveva protestato energicamente contro l'opinione che solo l'Analisi, e non la Geometria, sia suscettibile di una trattazione pienamente rigorosa *). E in fatti: perchè non dovrebbero esser rigorosi quei ragionamenti geometrici i quali fossero svolti a *fil di logica?* Il dubbio potrebbe aversi solo per quegli altri casi in cui insieme al ragionamento puro si adopera anche la intuizione geometrica: per esempio nelle ricerche più comuni di *Analysis situs* o *topologia*. Ma, come ho detto prima, questo accade solo in una piccola parte della Geometria moderna! E fra parentesi ricorderò che, secondo rilevava ultimamente OSGOOD **), anche nella odierna teoria delle funzioni di una variabile complessa vi sono dei teoremi, la cui dimostrazione non è stata finora liberata dall'uso della intuizione geometrica! D'altra parte bisogna pur avvertire che già s'è cominciato a mettere sotto forma matematicamente esatta alcuni concetti e proposizioni dell'*Analysis situs*: ad esempio in recenti lavori di SCHOENFLIES, OSGOOD ed altri.

In generale si può dire che i geometri aspirano oggidì al rigore quanto gli analisti! E' vero che gli strumenti di cui essi si servono talvolta non furon creati perfetti: come perfetti non erano i procedimenti usati dagli analisti un secolo fa! Ma si deve tener presente che alla Geometria, forse più che all'Analisi, occorre lasciar libera anzitutto la fantasia che guida alla scoperta: mentre è opera posteriore lo stabilire il tutto in modo rigoroso! Ed i geometri mirano a perfezionare i loro metodi, ricorrendo volentieri all'esempio ed all'ajuto dell'Analisi. Così dalle ricerche analitiche di PUISEUX si è dedotto il concetto geometrico esatto di *ramo* o *ciclo* di curva algebrica. Grazie ad esso CAYLEY, SMITH, HALPHEN, NOETHER, ZEUTHEN, ecc. han potuto dare una teoria pienamente rigorosa delle singolarità superiori delle curve piane; il teorema sul numero delle intersezioni di tali curve ha acquistato, col fissare la moltiplicità di ogni intersezione, un significato geometrico pienamente soddisfacente. Con ciò è stata avviata la trattazione rigorosa delle que-

---

*) D. HILBERT, *Mathematische Probleme* (Göttinger Nachr., 1900).

**) W. F. OSGOOD, *On a Gap in the ordinary Presentation of* Weierstrass' *Theory of Functions* [Bull. Amer. Math. Soc. (2), X (1904), p. 294].

stioni relative alla *moltiplicità delle soluzioni* dei problemi geometrici. Ma una tale trattazione sarà compiuta solo quando saran compiute le ricerche analoghe per le intersezioni delle varietà algebriche a più dimensioni.

La stessa cosa accadrà per tutti i metodi della *Geometria numerativa*, poichè in sostanza tutti si riducono a problemi d'intersezioni di varietà algebriche! Così le critiche mosse anche ultimamente *) a quello che SCHUBERT ha chiamato *Princip von der Erhaltung der Anzahl* potranno essere eliminate **). Un mio discepolo, il GIAMBELLI, da me spinto a studiar la questione, mi disse di esser riuscito a fissare delle grandi classi di problemi per le quali vale quel principio di SCHUBERT, ed altre per cui esso va modificato in un modo ben determinato. In base a queste ricerche tutti i numerosi risultati ottenuti dallo SCHUBERT e da altri, anche in questi ultimi anni, per mezzo di quel principio, sarebbero pienamente giustificati! Noterò di passaggio che fra i recenti risultati di geometria numerativa ve ne sono di molto importanti relativi agl'iperspazî. Essi son dovuti principalmente allo stesso SCHUBERT ed a vari geometri italiani, a partire dal CASTELNUOVO fino al GIAMBELLI. E si riferiscono: gli uni al numero degli spazî che verificano date condizioni, in particolare quella di secare in dati modi più spazî dati, od anche una curva o varietà data; gli altri invece a numeri di quadriche o di reciprocità, e così via.

Fra questi risultati ve ne sono che hanno uno speciale interesse per l'*Algebra*. E molti problemi difficilissimi dell'Algebra relativi alla determinazione di *numeri* posson risolversi facilmente colla Geometria numerativa! D'altra parte, come già accennai, questa deve ricorrere all'Algebra per la dimostrazione dei suoi principî, per la trattazione rigorosa delle varietà algebriche e delle loro intersezioni. Una tale trattazione s'è già cominciato a fare seguendo i concetti di KRONECKER ed altri. Così HILBERT in un lavoro fondamentale ***) ha trovato la forma di quella

*) V. la nota a pag. 378 della citata *Geometrie der Dynamen* dello STUDY; e G. KOHN, *Ueber das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl* [Archiv d. Math. u. Phys. (3), IV (1903), p. 312].

**) È notevole che nel *Lehrbuch der Algebra* di H. WEBER [I. Bd., 1. Aufl. (1895), p. 163] si ricorre appunto a quel principio, per dimostrare il teorema di BÉZOUT nel caso di 3 o più equazioni con altrettante incognite.

***) *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* [Math. Annalen, XXXVI (1890), p. 473].

che egli ha chiamato *funzione caratteristica* di un *modulo*, e che dà la *postulazione* di una varietà algebrica qualunque per forme di un ordine abbastanza elevato. E dopo di HILBERT altri han tentato di risolvere più completamente il problema della postulazione in certi determinati casi; oppure, come nelle numerose ricerche sul teorema di NOETHER $Af+B\varphi$, si sono occupati della rappresentazione di una varietà algebrica come costituente un *modulo*. Ma il campo amplissimo è tuttora aperto, e degno di profonde ricerche!

Signori, vi è una *moda* in Geometria come dovunque! Ma la moda di cui io ora voglio parlarvi rappresenta un grande progresso! Prima vi avevo detto dell'astrazione che ha acquistato la Geometria colla grande estensione data al sistema degli enti da studiare. Orbene l'astrazione s'è compiuta anche in un altro modo: cioè coll'ampliamento del *gruppo di trasformazioni*, che, nel senso di KLEIN, si pone a base dello studio. Una volta il gruppo di trasformazioni, che si sottintendeva come fondamentale, era quello della Geometria elementare. Poi, dopo PONCELET, i geometri s'erano abituati al punto di vista projettivo, e questo era ordinariamente sottinteso. Ai nostri giorni invece si tende a preferire un gruppo fondamentale ancora più ampio: *il gruppo delle trasformazioni birazionali!*

Con ciò non intendo certo dire che siano scarsi attualmente i lavori nell'indirizzo projettivo! Così poc'anzi alludevo a ricerche projettive essenziali sulle varietà algebriche a più dimensioni. Inoltre si sa bene che le proposizioni d'indirizzo birazionale si mutano, con un semplice artifizio, in proposizioni projettive. E nemmeno mancano lavori d'indole metrica, come tutti sanno! È certo però che sono state rare in questi ultimi tempi le ricerche un po' generali, nell'indirizzo projettivo, sulle curve piane o superficie algebriche, sui complessi di rette, ecc., le quali fiorivano invece anni sono. Ciò è forse dovuto in parte alla complicazione che s'incontrerebbe nel proseguirle. In pari tempo è andata un po' giù di moda la corrispondente teoria analitica, cioè la teoria degl'invarianti delle forme algebriche; sebbene essa sia stata, per così dire, rinfrescata da nuovi metodi e posta in nuova luce dalla teoria dei gruppi di SOPHUS LIE. Invece l'indirizzo che RIEMANN ha tracciato per lo studio delle funzioni algebriche di una variabile e dei loro integrali, cioè quello rivolto alle proprietà che non mutano per trasformazioni bira-

zionali delle variabili, può dirsi il trionfatore nelle ricerche algebrico-geometriche d'oggidì!

A ciò contribuì moltissimo la teoria generale delle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio: merito speciale del CREMONA, di cui noi tutti da un anno rimpiangiamo la perdita! Da essa in fatti derivò il concetto di proprietà invariabili per trasformazioni Cremoniane: applicato ad esempio dal BERTINI alle involuzioni del piano.

Ma un'influenza anche maggiore sul trionfo odierno delle proprietà degli enti algebrici, che non mutano per trasformazioni birazionali degli enti stessi, ebbe la memoria del 1873 di BRILL e NOETHER: *Ueber die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie* *). Essa non ha solo contribuito — come già prima CLEBSCH e GORDAN — a far conoscere quell'indirizzo di RIEMANN. Col sostituire alle funzioni algebriche le *serie lineari* di gruppi di punti sopra una curva algebrica, essa ha anche dato ai teoremi noti e ad altri, nuovi e fondamentali, una tal forma geometrica da prestarsi immediatamente alle applicazioni. L'influenza di quella Memoria sulla Geometria attuale è stata immensa! Ne derivarono direttamente le ricerche moderne sulle curve algebriche sghembe ed iperspaziali, quelle sui sistemi lineari di curve piane, ed altre ancora. Tutta una scuola di geometri italiani riconosce nella Memoria di BRILL e NOETHER il suo punto di partenza!

Più fecondi ancora divennero quei concetti, quando, per opera appunto di questa scuola, essi acquistarono un carattere più astratto e più generale, venendo riferiti a curve iperspaziali, e specialmente introducendosi metodicamente l'importante nozione di *somma* di due serie lineari (corrispondente a quella di *prodotto* nel campo di razionalità definito da un irrazionale algebrico). Con questi strumenti CASTELNUOVO ha ottenuto nuovi risultati notevolissimi sulle curve algebriche, per esempio riguardo alla questione che ho già citata della postulazione. Più notevole ancora è il modo come quella teoria ha potuto applicarsi, od estendersi per analogia, nella geometria delle superficie!

Mentre in Francia il PICARD studiava le superficie algebriche per via trascendente, svolgeva cioè la teoria degl'integrali doppi e degl'integrali di differenziali totali delle funzioni algebriche di due variabili, e

*) Math. Ann. VII (1874), p. 269.

l'HUMBERT si occupava con successo delle così dette superficie iperellittiche, in Italia, dal 1893 in poi, ENRIQUES e CASTELNUOVO presero a costruire geometricamente la teoria dei sistemi lineari di curve sopra una superficie algebrica. Essi applicarono i concetti della geometria sopra una curva ed i concetti analoghi relativi ad una superficie, per esempio quelli di somma e differenza di due sistemi lineari, da cui poi si passa a quello di sistema *aggiunto* di un sistema dato; e nello stesso tempo si valsero, approfondendole ulteriormente, delle importanti proposizioni che già il NOETHER aveva ottenuto in questo campo. Così riuscirono a stabilire una lunga serie di nuovi risultati veramente brillanti. Citerò, solo come esempî, la dimostrazione della razionalità di tutte le involuzioni piane; lo studio di nuovi caratteri di una superficie, invariabili per trasformazioni birazionali; le condizioni perchè una superficie sia razionale, oppure sia riferibile ad una rigata; la possibilità di eliminare da una superficie le così dette curve eccezionali, se la superficie non è riferibile ad una rigata *). Nel trattato in cui il PICARD, coadiuvato dal SIMART, va esponendo la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* **), accanto alle sue proprie ricerche analitiche egli ha pur fatto posto ad una parte di quelle geometriche di CASTELNUOVO ed ENRIQUES.

La geometria sopra una superficie si applica — non occorre dirlo — a varietà algebriche doppiamente infinite qualunque. Così il FANO se n'è servito nello studio delle congruenze di rette. Ed altri giovani si sono ora messi a coltivarla, tra cui DE FRANCHIS e SEVERI. Fra le tante questioni a cui tendono le ricerche attuali citerò la seguente, di grande importanza: è possibile fissare sopra una data superficie algebrica un numero finito di sistemi continui di curve, sì che ogni altra curva algebrica possa dedursi da quelle colle operazioni di addizione e sottrazione? Finora essa era stata risolta affermativamente solo per certe classi di superficie ***). Il SEVERI ritiene di possederne la soluzione per qualunque

*) V. CASTELNUOVO-ENRIQUES: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [Annali di Matematica (3), VI (1901), pag. 165]. Ivi son citati anche i lavori precedenti.

**) Paris, t. I (1897); t. II (1900, 1904).

***) Così il PICARD (*Théorie*, etc., t. II, pag. 246-47) ha un teorema analitico, che risolve la questione per quelle superficie i cui integrali di differenziali totali si riducono a combinazioni algebrico-logaritmiche.

superficie, ma ancora non l'ha pubblicata. Teoremi siffatti hanno un'alta importanza sì geometrica che algebrica. Essi permettono di definire per le curve giacenti su una data superficie certi *caratteri*, grazie a cui molte proprietà delle curve stesse, per esempio il numero delle loro mutue intersezioni, risultino determinate.

Alla geometria delle trasformazioni birazionali appartiene anche lo studio delle corrispondenze algebriche su una data varietà. Voi sapete, o Signori, che HURWITZ, per mezzo degl'integrali Abeliani e delle funzioni Θ, è riuscito a trattare in modo completo le corrispondenze algebriche fra i punti di una data curva algebrica: in particolare le corrispondenze birazionali. Quanto alle corrispondenze sulle superficie algebriche, si hanno solo pochi risultati speciali, di PICARD, CASTELNUOVO-ENRIQUES e PAINLEVÉ, intorno alle superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali.

Invece per quel che riguarda i *gruppi* di trasformazioni birazionali del piano, essi sono stati determinati completamente: quelli d'ordine finito da KANTOR e WIMAN, quelli continui da ENRIQUES. ENRIQUES e FANO hanno poi determinato anche i gruppi continui birazionali dello spazio. In queste ricerche i metodi geometrici hanno servito ben più che quelli analitici. Del resto tutti sanno quanto il grande creatore della teoria dei gruppi continui, SOPHUS LIE, si sia valso dei metodi geometrici nella sua costruzione; e come, ad esempio, il problema della *struttura* dei gruppi continui finiti si riduca a studiare la intersezione di certe varietà lineari e quadratiche!

La teoria dei *gruppi,* sia quella di GALOIS, sia quella di LIE, si presenta spesso nelle ricerche geometriche dei nostri tempi. E vi sono sicuri indizî che la sua influenza sulla Geometria è destinata a crescere!

Le varietà di enti che si considerano ordinariamente in Geometria sono *analitiche*, od in particolare *algebriche*: definibili cioè con legami analitici od algebrici fra le coordinate complesse dei loro elementi. Ma, seguendo la tendenza ad ampliare il campo geometrico, si possono anche studiare delle varietà più generali: ottenute cioè considerando staccatamente, come variabili indipendenti, le due componenti reali di ogni coordinata complessa; e ponendo dei legami fra le varie coppie di componenti reali. Se questi legami sono algebrici, si hanno le così dette

varietà *iperalgebriche,* intorno a cui io ho pubblicato verso il 1890 alcune ricerche *). Fra esse vi sono le imagini geometriche di quelle forme quadratiche di HERMITE a variabili complesse coniugate, che si son presentate tanto spesso in questi anni, collegandosi ai gruppi di sostituzioni lineari ed alle funzioni automorfe. Così le forme di HERMITE nel campo quaternario rappresentano delle corrispondenze fra punti e piani molto analoghe alla polarità rispetto ad una quadrica. Considerandole sotto questo aspetto geometrico, varie questioni su quelle forme, per esempio sulle loro espressioni canoniche, sulle loro trasformazioni lineari in sè stesse, ecc., riescono notevolmente semplificate.

Fra le varietà iperalgebriche si trovan pure quelle composte dei punti reali di una varietà algebrica. Così dalla geometria degli enti *complessi* passiamo a quella degli enti *reali*!

Le funzioni di variabili complesse han fatto trascurare per qualche tempo le funzioni di variabili reali, sebbene queste sian più importanti di quelle! Ora, o Signori, lo stesso fatto è accaduto in Geometria! Sono pochi gli scienziati che si occupano delle quistioni di realità, o forma, o topologia; quantunque esse costituiscano un campo così degno di essere coltivato!

Quanto all'*Analysis situs,* dopo i noti lavori di W. DYCK e quelli del PICARD, si sono avute, anche ultimamente, parecchie ricerche originali del POINCARÉ su problemi molto generali.

Intorno alla forma delle superficie algebriche non si è più avuto nulla di essenziale dopo ciò che ha fatto il ROHN per le superficie del 4° ordine. Invece sulla forma delle curve algebriche HILBERT **) ha risolto alcune questioni: per esempio sui rami pari di curve piane che possono stare l'uno dentro l'altro, e sulle curve sghembe di dato ordine col massimo numero di rami. KLEIN ***) ha studiato le questioni di realità per le forme di contatto (*Berührungsformen*) della curva canonica reale di genere dato (*Normalkurve der* φ), in base alla distinzione da lui fatta delle superficie *simmetriche di* RIEMANN in specie. E qualche altra ricerca è stata fatta da F. MEYER ed altri.

*) Atti Accad. Torino, tomi XXV (1889-90) e XXVI (1890-91), quattro Note; e Math. Ann., XL (1892).

**) *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven* [Math. Ann., XXXVIII (1891), p. 115].

***) *Ueber Realitätsverhältnisse bei der Normalcurve der* φ [Math. Ann., XLII (1893), p. 1].

Alcuni scienziati, come H. BRUNN e più ancora A. KNESER *), han tentato di studiare la forma delle curve reali senza porre la condizione dell'algebricità, solo ammettendo qualche condizione di continuità. I risultati più notevoli in questa direzione furon ottenuti nel 1899 da C. JUEL **), specialmente profittando del fatto che in determinati casi una corrispondenza reale d'indici p, q ha sempre $p+q$ coincidenze reali.

Infine anche nella trattazione delle curve definite da equazioni differenziali si è discussa la forma delle curve. Citerò fra i moderni, oltre alle note ricerche di POINCARÉ e PICARD, ed a quelle speciali di HADAMARD relative alle trajettorie ed alle geodetiche di una data superficie, una tesi del 1903 di H. DULAC ***). È notevole che, per aver la forma delle curve integrali di un'equazione differenziale di 1° ordine in prossimità di un punto singolare, si può ricorrere ad un procedimento del tutto analogo a quello che si usa pei rami reali di una curva algebrica uscenti da un punto singolare.

Dalla geometria complessa ero passato a quella reale. Ma debbo pure avvertire che l'astrazione, che ripetutamente ho messo in evidenza come un carattere della Geometria moderna, ha avuto anche l'effetto di moltiplicare, per così dire, le *geometrie complesse*.

Da un lato si può avere l'opportunità di considerare certi enti geometrici come *punti* di nuova natura, aventi per coordinate numeri complessi di specie superiore. Così nello studio delle varietà iperalgebriche, fin nei problemi più semplici che nascono dalla considerazione dei rami reali di una curva algebrica, si son presentati spontaneamente dei *punti bicomplessi* ****).

D'altra parte, come strumenti di ricerca, si sa bene, fin dai lavori di GRASSMANN e di HAMILTON, che varie sorte di numeri complessi posson servire utilmente in Geometria. Così con tali numeri si son rappresentati analiticamente i movimenti, e poi anche i gruppi lineari omogenei, ecc. In questi ultimi anni, seguendo un antico accenno di CLIFFORD,

*) Math. Ann., XXXI (1888), XXXIV (1889) e XLI (1893).

**) *Introduction à l'étude des courbes graphiques* (Mém. Acad. Danemark, Kjöbenhavn, 1899).

***) *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* (Paris, 1903).

****) V. il mio lavoro già citato dei Math. Ann., XL (1892).

si son considerati in particolare i tre sistemi di numeri complessi a due unità $a + b\varepsilon$, in cui il quadrato dell'unità ε vale -1, $+1$, 0. Essi rappresentano in un certo senso le tre geometrie iperbolica, ellittica, parabolica. Quelli con $\varepsilon^2 = 0$ ebbero applicazioni importanti, specialmente nella geometria della retta, da vari scienziati: STUDY, KOTJELNIKOFF, SEILIGER, JOHANNES PETERSEN *). Nella *Geometrie der Dynamen* dello STUDY ne è fatto ampio uso. Assumendo tre di questi numeri come coordinate omogenee di una retta nello spazio, la geometria metrica delle rette e dei complessi lineari o dinami acquista una singolare semplicità ed eleganza! È notevole che questa geometria metrica viene a differire da quella ordinaria per quel che riguarda gli elementi all'infinito. Volendo render chiuso il continuo formato dalle ∞^4 rette proprie dello spazio, lo si può completare aggiungendo non le ordinarie rette all'infinito ma gli ordinari punti all'infinito **)!

Non è improbabile che anche altre specie particolari di numeri complessi vengano a rendere importanti servizi alla Geometria!

Anche una limitazione del corpo dei numeri adoperati in Geometria sembra destinata ad un avvenire! La teoria aritmetica delle forme nel campo dei numeri interi equivale ad una geometria del reticolo (*Zahlengitter*) costituito dai punti delle coordinate *intere*. Di ciò ha fatto notevoli applicazioni ad es. H. MINKOWSKI nella sua « *Geometrie der Zahlen* » ***) e altrove. Similmente POINCARÉ in una memoria del 1901 « *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* » ****) ha cominciato a considerare le curve piane algebriche a coefficienti *razionali*, dal punto di vista del gruppo di quelle trasformazioni birazionali i cui coefficienti son pure razionali. Si hanno allora, per l'equivalenza di due curve da questo punto di vista, dei criteri nuovi, più restrittivi che nella ordinaria geometria sopra una curva. Così, oltre al genere, compajono certi nuovi caratteri invariantivi.

Una geometria dei punti di coordinate *razionali* si presenta come una necessità matematica a chi accetti il concetto di KRONECKER e di

---

*) V. le citazioni a pag. 207 e 208 del libro di STUDY. — Il nome PETERSEN è stato poi mutato in HJELMSLEV.

**) V. anche STUDY, *Ein neuer Zweig der Geometrie* [Jahresb. der Deutschen Math.-Verein., XI (1902), p. 97].

***) Leipzig 1896. — V. anche Math. Ann., LIV (1901), p. 91.

****) Journ. de math. (5) VII, p. 161.

GUSTAVE ROBIN *), che esclude dall'Analisi i così detti numeri irrazionali!

Si avvera quanto il KLEIN **) nel 1892 profetava: cioè che col tempo la unione della Geometria colla teoria delle funzioni non sarebbe più bastata, ma come terza alleata avrebbe dovuto entrare la teoria dei numeri!

Così, o Signori, il mio discorso — che, per non stancarvi troppo, io debbo troncare — ritorna al suo punto di partenza. Quantunque io non abbia nemmen parlato della geometria differenziale, di quella che MONGE chiamava « *Application de l'Analyse à la Géométrie* », pure voi avrete notato quanto numerosi siano gli analisti, che io ho citato per le loro ricerche geometriche! Ciò deriva, io credo, non solo dal possedere l'Analisi strumenti potenti per la trattazione dei problemi geometrici, ma anche dal fatto che i campi geometrici più coltivati ai nostri giorni presentano questo carattere: d'interessare in un modo o nell'altro anche gli analisti. Ed ora questi intendono bene l'importanza della Geometria. E così, per dare ancora qualche esempio, la concezione geometrica delle equazioni differenziali è accolta da tutti ***)! E così voi vedete WIRTINGER e POINCARÉ ricorrere a certe varietà iperspaziali nei più recenti studî delle funzioni Abeliane e delle Θ; e PINCHERLE, che rappresenta le funzioni analitiche con punti di uno spazio ad infinite dimensioni, traendone grandi vantaggi nello studio delle operazioni funzionali; e i trattati ultimi di PICARD, di HENSEL-LANDSBERG, di KRAZER, e di altri, che si valgono ripetutamente delle rappresentazioni geometriche! Finora queste rappresentazioni si son fatte specialmente per le funzioni algebriche e loro integrali. Ma, se il parallelismo fra Geometria ed Analisi sarà esteso a campi numerici e funzionali più ampî e più varî, ne potranno derivare nuovi punti di vista e nuovi importanti risultati per entrambe le scienze!

---

*) *Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.* Paris 1903.

**) RIEMANN'*sche Flächen*, II. [Lithogr. Vorles. Göttingen 1892, p. 71].

***) Cfr., fra tante, le ricerche geometriche di E. von WEBER per la *Theorie der Systeme* PFAFF'*scher Gleichungen* [Math. Ann., LV (1902), p. 386].

SULLE CURVE RAZIONALI DEL QUINTO ORDINE.

Memoria di **Giuseppe Marletta**, in Catania.

Adunanza del 27 novembre 1904.

PREFAZIONE.

Nel presente lavoro si tratta delle curve razionali del quinto ordine: e precisamente della normale studiata direttamente, e delle altre considerate (CLIFFORD) come proiezioni *) di questa.

La quintica razionale normale c è studiata nel Cap. I; notevoli sono le rette per ciascuna delle quali passano ∞^1 spazi quadrisecanti la curva, e che son chiamate rette l. Dallo studio del sistema di queste rette, seguono molte importanti proposizioni circa le altre quintiche razionali. Si studiano, inoltre, le omografie involutorie aventi la c come invariante, e le *coniche* t ad esse inerenti; da questo studio dipendono le condizioni affinchè le altre quintiche razionali siano *omologiche*.

Nel Cap. II si studiano le curve razionali del quint'ordine immerse in [4]: ciascuna di esse giace sopra una (sola) rigata cubica, ed è secata in quattro punti dalle coniche di questa. Notevole mi sembra il teorema del § 7, per cui data una curva razionale d'ordine qualunque e immersa in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, si possono determinare, in questo spazio, le omografie aventi la detta curva come invariante. Da questo teorema seguono molte conseguenze nei due capitoli seguenti, nei quali si tratta delle quintiche razionali gobbe e piane.

---

*) La quartica gobba razionale fu studiata, analogamente, considerandola quale proiezione della normale. MARLETTA, *Studio geometrico della quartica gobba razionale* [Ann. di Matem., serie III, tomo VIII (1903)].

Nell'ultimo capitolo si interpetrano, nella geometria della retta, i risultati ottenuti nei quattro capitoli precedenti, enunciando, cioè, dei teoremi circa le rigate gobbe del quinto grado, delle quali si dà pure una classificazione.

I.

Quintica razionale normale.

1. Sia c una curva razionale del quinto ordine immersa in uno spazio Σ_5 da cinque dimensioni. I suoi ranghi sono: *otto* il primo e il terzo, *nove* il secondo. Un punto qualunque P di Σ_5 e l'iperpiano dei punti d'iperosculazione dei cinque iperpiani iperosculatori c uscenti da P, sono *) polo e iperpiano polare rispetto ad una determinata polarità nulla di Σ_5, che indicheremo con Π. È inoltre noto che gl'iperpiani proiettanti i singoli punti di c, da due spazi **) quadrisecanti questa stessa curva, generano due fasci omografici. Per cui, considerando le forme polari rispetto a Π, abbiamo che gl'iperpiani iperosculatori c punteggiano omograficamente due qualunque rette ciascuna comune a quattro iperpiani iperosculatori, e quindi in particolare due tangenti di c.

2. Dal computo delle costanti segue che per una retta generica di Σ_5, passa un numero finito di spazi quadrisecanti c. Se per una retta r di Σ_5 passano i due spazi S_3 e S'_3 quadrisecanti c, si consideri il cono quadrico avente r per vertice, e passante per S_3, S'_3 e S''_3, ove S''_3 è lo spazio individuato da r e da uno qualunque degli ∞^1 piani trisecanti c e incidenti r.

Questo cono quadrico contiene interamente c: ne segue che

Per una retta qualunque di Σ_5 passa un solo spazio quadrisecante c; ovvero ne passano ∞^1 formanti gli spazi generatori di uno stesso sistema di un cono quadrico avente quella retta per vertice.

Le ∞^6 rette di Σ_5 per ciascuna delle quali passano ∞^1 spazi quadrisecanti c, saranno chiamate, per brevità, *rette* l, e le ∞^4 rette per cia-

*) CLIFFORD, *On the classification of loci* [Phil. Transactions of the Roy. Soc. of London, t. CLXIX (1878), Part II].

**) In tutto questo lavoro chiameremo *spazio* ogni [3].

scuna delle quali passano quattro iperpiani iperosculatori c, saranno chiamate *rette* s. Inoltre indicheremo con λ e σ gli spazi polari delle rette l ed s rispetto a II. Dunque:

In uno spazio di Σ_5 *esiste una sola retta* s, *ovvero ne esistono* ∞^1 *formanti una schiera rigata.*

3. Sia S_3 uno spazio generico, e O un punto qualunque fuori di esso. Per un punto generico di S_3 passa una sola retta che giaccia insieme con O in uno stesso spazio σ. Le rette siffatte formano dunque una congruenza (ρ) d'ordine uno e di una certa classe x. Le ∞^2 rette l di O, secano S_3 in una curva singolare per (ρ), e il cui ordine indicheremo con y. È chiaro, inoltre, che le ∞^1 rette di (ρ) uscenti da un punto singolare per questa congruenza, sono le generatrici di un cono quadrico. Allora per note formole circa le congruenze di ordine *uno* e classe x, abbiamo:

$$2y = x(x-1) \quad \text{e} \quad 4y = x(x+1), \quad \text{da cui} \quad x = 3 \quad \text{e} \quad y = 3.$$

Concludiamo che

Le ∞^2 *rette* l *uscenti da un punto generico di* Σ_5, *formano un cono cubico; e in un piano generico esistono tre rette tali che i rispettivi spazi* σ *passino per un punto dato.*

Queste tre rette sono i lati del triangolo avente per vertici i tre punti del piano, per ciascuno dei quali passa una retta l uscente dal punto dato.

4. Gli spazi σ uscenti da un punto O, sono ∞^2: per una retta generica di O ne passa uno solo, come uno solo ne può giacere in un iperpiano generico uscente da O. Prendendone le forme polari, e tenendo conto del teorema precedente, abbiamo:

Le rette s *di un iperpiano* S_4 *sono* ∞^2, *e precisamente sono le generatrici* *) *di una forma cubica con piano doppio.*

---

*) SEGRE. *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, etc. [Mem. R. Acc. di Torino, s. II, t. XXXIX (1888)]. Dal punto di vista dal quale consideriamo questa forma cubica, cioè in relazione ad una rigata cubica normale, discendono subito con semplicissime osservazioni, tutte le proprietà di una forma cubica con piano doppio [illegible]. In particolare ritroviamo le proposizioni dei nⁱ 6, 10, 11 del cap. I della memoria di FERRAZZO, *Sulle incidenze di rette, piani*, etc. [Mem. R. Acc. di Torino, serie II, tomo LIV].

Visto che in uno spazio di S_4 ne giace una sola, come pure una sola ne passa per un punto generico di detta forma.

Gli spazi λ *di* S_4 *sono* ∞^2 *e precisamente sono gli spazi passanti per gl'* ∞^1 *piani della forma cubica ora detta.*

5. Sia g_2^1 un'involuzione quadratica razionale esistente fra i punti di c, e indichiamo con E ed F i punti doppi di g_2^1. Le congiungenti i punti coniugati di questa involuzione, formano una rigata (razionale) θ del quarto ordine. Per un punto qualunque di θ passa una (sola) conica (direttrice) di θ; e le ∞^1 coniche di questa superficie si ottengono tutte, secando θ cogl'iperpiani passanti per due generatrici qualunque di essa. In tal modo si vede, inoltre, che ciascuna conica di θ contiene un (solo) punto di c. Viceversa si noti che ogni rigata θ del quarto ordine di Σ_5, senza direttrice rettilinea *), si può considerare come costituita dalle congiungenti i punti coniugati di una g_2^1 di una quintica razionale normale. Infatti basterà riferire biunivocamente le generatrici di θ alle coppie d'iperpiani, di un fascio, coniugati in un'involuzione ordinaria.

Indichiamo con e ed f le coniche di θ passanti per E ed F. Se A e B sono due punti coniugati qualunque di g_2^1, gl'iperpiani proiettanti i punti A, B, E, F, e passanti per due generatrici arbitrarie di θ, formano un gruppo armonico, per cui possiamo dire che i punti $AB.e$ e $AB.f$, separano armonicamente la coppia AB. Viceversa è chiaro che le sole coniche e ed f separano armonicamente tutte le coppie di punti coniugati della g_2^1. Le coniche come e ed f, cioè ciascuna delle quali contiene un punto di c, e giace nella rigata costituita dalle congiungenti i punti coniugati di una g_2^1 di c, avente il detto punto come doppio, saranno chiamate, per amor di brevità, *coniche* t. Le due coniche t, direttrici della rigata avente per generatrici le congiungenti i punti coniugati nella g_2^1 avente per punti doppi i due punti di c posti in esse coniche, si chiameranno *associate* (fra loro). È chiaro che fissata una conica t, esiste un'altra sola conica t ad essa associata. Per un punto qualunque di c passano ∞^1 coniche t, giacchè ∞^1 sono le involuzioni quadratiche razionali fra i punti di c, aventi quel punto come doppio.

*) Proiettivamente parlando, esistono due tipi di rigate del quarto ordine immerse in un [5]. Vedi SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* [Atti della R. Acc. di Torino, vol. XIX (1884)].

Una qualunque corda AB di c, incontra una ed una sola conica t uscente da un punto E di c, quella precisamente che si ottiene considerando la $g_2^1 \equiv E_B^A$. Le coniche t sono in numero doppiamente infinito, per cui concludiamo che:

Una quintica razionale normale è trasformata in sè stessa da ∞^2 omografie involutorie dotate di due piani di punti uniti.

È chiaro, poi, che non esistono omografie involutorie di Σ_5 diverse da queste, che trasformino in sè stessa la curva ora detta.

6. Sia P un punto qualunque della congiungente due punti A e B di c: vogliamo trovare il numero delle coniche t passanti per P. Sia t_1 una di queste, e γ l'omografia involutoria di Σ_5, che trasforma c in sè stessa, ed ha il piano di t_1 come uno dei due piani di punti uniti. Siccome P è unito per γ, così sarà pure unito per questa omografia, l'iperpiano π polare di P rispetto alla polarità nulla Π (§ 1). Ne segue che dei cinque punti πc, uno E_1 sarà unito per γ, e gli altri quattro E_2, E_3, E_4, E_5 saranno divisi in due coppie di punti coniugati rispetto all'involuzione che γ determina su c. Indicando con E_2E_3, E_4E_5 queste due coppie, il piano di t_1 contiene tre punti (non allineati) di π, e precisamente contiene i due punti $E_2E_3 . t_1$, $E_4E_5 . t_1$, e il punto P. Segue, inoltre, che E_1 giace in t_1. Viceversa l'involuzione E_{iB}^A $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, determina in Σ_5 un'omografia involutoria γ trasformante c in sè stessa, e avente un piano di punti uniti passante per P. In effetti siccome AB è una retta unita per γ, pure unito sarà il suo spazio polare rispetto a Π, e quindi anche unito l'iperpiano π polare di P, dovendo passare per E_i. Ne segue che P è unito per γ, e che giace nel piano di punti uniti passante per E_i: Concludiamo che:

Per un punto qualunque di una corda di c, passano cinque coniche t.

Ragionando analogamente si dimostra che:

Per un punto qualunque di una tangente di c, passa una (sola) conica t.

7. Si consideri una qualunque conica t: l'iperpiano iperosculatore c nel punto ct, è unito per l'omografia involutoria γ trasformante c in sè stessa, e avente come uniti i punti del piano di t. Ma gl'iperpiani uniti per γ, sono quelli uscenti da uno dei due piani di punti uniti, per cui l'iperpiano iperosculatore ora detto, contiene t, non potendo conte-

nere altri punti di c diversi da quello d'iperosculazione. Ed ora, siccome gl'iperpiani polari dei punti del piano di t, rispetto alla polarità Π, sono uniti per γ, così concludiamo che:

I piani delle coniche t sono autopolari rispetto alla polarità nulla Π.

8. Le rette l di uno spazio generico, formano una congruenza d'ordine tre, e di una certa classe che calcoleremo fra poco. Ma se lo spazio è quadrisecante c, le sue rette l costituiscono un complesso quadratico, giacchè gli ∞^2 spazi σ uscenti da un punto qualunque di Σ_5, sono gli spazi degli ∞^2 coni quadrici contenuti nel cono cubico (§ 3) delle rette l uscenti da quel punto.

9. In uno spazio generico, esistono ∞^1 piani appartenenti a spazi σ: essi formano un fascio gobbo, di cui vogliamo calcolare la classe. A tal fine si osservi che se un piano uscente da un certo punto P, giace in uno spazio σ, esso contiene (§ 8) due rette l uscenti da P. Or siccome in uno spazio generico per P, esistono (§ 3) tre rette l uscenti da P, così segue che la classe richiesta è *tre*.

10. Se una retta ruota attorno a un punto P in un piano β, lo spazio σ passante per essa, genera una forma del quarto ordine: infatti uno spazio generico passante per β, la seca ulteriormente in tre piani (§ 9) (uscenti da P).

Fra le rette di un piano β e i punti di un altro piano γ, si può stabilire una corrispondenza nella quale sono omologhi una retta di β e un punto di γ, posti in uno stesso spazio σ. Tale corrispondenza fra β e γ è $(3, 1)$ (§ 3); ed è del quarto ordine. Se quindi indichiamo con x il numero delle rette l poste in un piano generico, e con y il numero degli spazi σ secanti secondo rette entrambi i piani β e γ, si deve avere $2^2.x + y = 4^2 - 3$, cioè $4x + y = 13$. Per determinare x e y, serviamoci, per ora, del principio sulla permanenza dei numeri; e precisamente consideriamo due piani β e γ incidenti. Allora se uno spazio σ seca secondo rette sghembe questi due piani, esso apparterrà all'iperpiano $\beta\gamma$. Dunque già vi sono $\binom{5}{4} = 5$ spazi σ secanti secondo rette (sghembe) entrambi i piani β e γ. Ma, inoltre, per quanto si disse in principio di questo paragrafo, vi sono quattro spazi σ uscenti dal punto $\beta\gamma$, e

secanti secondo rette questi due piani, onde concludiamo che è $y = 9$, e quindi $x = 1$ *).

11. Del resto senza servirci del principio sulla permanenza dei numeri, possiamo dimostrare che è $x = 1$, e quindi $y = 9$.

Infatti se in un piano β esistono due rette l, incidenti in un punto P, esse apparterranno ad un (solo) cono quadrico del cono cubico (§ 3) a tre dimensioni costituito dalle rette l uscenti da P. Per cui il piano β giacendo in uno spazio σ, possiede (§ 8) ∞^1 rette l formanti un fascio di second'ordine. Possiamo dunque concludere che

In un piano generico di Σ_5, esiste una sola retta l.

In uno spazio generico le rette l formano dunque una congruenza di ordine tre e di classe uno, avente un fascio gobbo di classe tre singolare, e in ogni piano di questo le ∞^1 rette l costituiscono un fascio di second'ordine. Per cui devono essere soddisfatte le note relazioni circa le congruenze di classe uno e di ordine qualunque, e infatti si ha identicamente: $3.2(2-1) = 3(3-1)$ e $3.2^2 = 3(3+1)$; questa osservazione valga come verifica dei risultati dati in questi ultimi paragrafi.

12. Per un punto qualunque di Σ_5 passa un sol piano trisecante c.

I piani trisecanti c e incidenti una retta r, determinano su questa curva ∞^1 terne di punti, tali che dato un punto di c, ne restano determinate tre contenenti detto punto. I piani trisecanti c e incidenti un dato piano, determinano su c ∞^2 terne di punti, tali che a due punti qualunque di questa curva, ne appartengono tre. Segue che sono *nove* i piani trisecanti c e incidenti una retta e un piano (in posizione generica). Concludiamo che

I piani trisecanti c e incidenti una data retta, formano una varietà d'ordine nove.

Analogamente si dimostra che esistono *diciotto* piani trisecanti c, incidenti una data retta, e secanti secondo rette un dato spazio (in posizione generica con la retta). Ed ora, osservando che un iperpiano passante per questo spazio, contiene dieci piani trisecanti c, concludiamo che

---

*) Che sia $y = 9$ si può dimostrare pure come segue. Gli spazi σ secanti un piano qualunque secondo una retta, determinano su c una doppia infinità di quaterne di punti, tali che per due punti di c ne passano *tre*. Ne segue $y = 3 \cdot 3 = 9$.

Le rette di uno spazio qualunque, appartenenti a piani trisecanti c, formano una rigata di grado otto *).

II.

Quintica razionale dello spazio da quattro dimensioni.

1. Sia c_4 una curva razionale del quinto ordine immersa in uno spazio Σ_4 da quattro dimensioni.

La curva c_4 ha cinque iperpiani stazionari, i cui punti di contatto giacciono in uno stesso iperpiano. Se questi iperpiani stazionari sono tutti distinti, il gruppo dei cinque punti in cui essi sono secati da una tangente alla curva, si conserva proiettivo a sè stesso al variare di questa tangente **) (I, § 1).

La superficie delle tangenti di c_4 è d'ordine otto, e la varietà dei piani osculatori è d'ordine nove. Per un punto generico di Σ_4, passano otto iperpiani iperosculatori c_4.

La curva c_4 possiede una trisecante (I, § 12).

Esistono ∞^2 piani quadrisecanti c_4, tali che per un punto generico di Σ_4 ne passa uno solo; ma esiste una rigata cubica normale φ, per ciascun punto della quale passano ∞^1 di tali piani, formanti i piani generatori di uno stesso sistema di un cono quadrico avente quel punto per vertice (I, §§ 2 e 3).

Un piano generico è secato secondo rette da tre piani quadrisecanti c_4 (I, § 3).

I piani quadrisecanti c_4 e uscenti dai punti di una retta generica r di Σ_4, costituiscono una forma d'ordine quattro, giacchè $4 = 1.1 + 1.3$ sono le rette per ciascuna delle quali passa un piano quadrisecante c_4, e che sono incidenti r ed s, essendo s una retta qualunque di Σ_4 sghemba con r. Se ora sono α e β due piani generici di Σ_4, i piani quadrisecanti c_4, stabiliscono fra i punti di α e quelli di β, una corrispondenza cremoniana del quart'ordine.

*) Chiamando omologhi due punti di due piani generici μ e ν di Σ_5, ogni qual volta stiano sopra una stessa retta l, si ottiene un bell'esempio di trasformazione (3, 3) del quarto ordine, senza punti fondamentali.

**) LORIA, *Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a n — 1 dimensioni* [Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tomo II (1888)].

I punti fondamentali di α, p. es., per questa corrispondenza, sono i punti $\alpha\varphi$, ciascuno contato due volte, e i tre punti in cui α seca i tre piani quadrisecanti c_4 e incidenti β secondo rette. Per cui si ha identicamente: $4^2 - 1 = 3.2^2 + 3$. Questa osservazione valga a conferma delle cose dette.

2. Siccome per un punto qualunque di φ passano ∞^1 piani quadrisecanti c_4, così questi incontrano tutte le generatrici di φ, cioè:

I piani quadrisecanti c_4 sono i piani delle coniche della superficie φ (I, § 8).

Ciò d'accordo col fatto che i piani detti passanti per un punto di φ, sono ∞^1 e formano un cono quadrico.

Siano A e B due punti di φ: proiettando questa da A e da B, si ottengono due coni quadrici secantisi nella φ, e nel piano della conica di φ passante per A e per B. Ed ora siccome i piani delle coniche di φ sono quadrisecanti c_4, così le generatrici di φ sono unisecanti c_4, e la direttrice ne è la trisecante. Concludiamo dunque che:

La curva c_4 giace in una superficie cubica φ; le coniche di questa sono quadrisecanti c_4, le generatrici sono unisecanti, e la direttrice ne è la trisecante.

Per c_4 passa la sola superficie cubica φ: infatti se per c_4 passasse un'altra superficie cubica φ_1, proiettando φ e φ_1 da un punto generico M di c_4 in uno spazio, si avrebbero due quadriche passanti per una stessa quartica gobba razionale, e ciò è assurdo se M non giace nella trisecante di c_4. Del resto basterebbe osservare che le generatrici di φ punteggiano biunivocamente c_4 e la sua trisecante, e questa corrispondenza biunivoca è perfettamente determinata, giacchè i tre punti di appoggio della trisecante, sono tre punti tautologhi.

3. Proiettando c_4 da una generatrice di φ, si ottiene un [1]-cono d'ordine quattro, avente come triplo il piano passante per la direttrice di φ. Ne segue che:

La quintica razionale più generale di Σ_4, è l'ulteriore intersezione di una rigata cubica (normale), con un cono del quarto ordine, avente per vertice una generatrice di questa, e per piano triplo quello che passa per la direttrice di questa medesima superficie.

Sopra una rigata cubica normale esistono dunque ∞^8 quintiche razionali; due qualunque di esse hanno sette punti comuni.

4. La curva c_4 può sempre essere considerata quale proiezione della quintica razionale normale c, fatta da un certo punto O (Clifford).

Un iperpiano qualunque dello spazio Σ_5 di c, seca la superficie delle tangenti di questa, in una curva d'ordine otto con cinque cuspidi, la quale, perciò, giace in una quadrica (a tre dimensioni). Prendendone le forme polari rispetto alla polarità Π (I, § 1), e secando coll'iperpiano Σ_4 di c_4, si ha:

Gli spazi iperosculatori di c_4, toccano una stessa forma quadratica.

Questi ∞^1 spazi iperosculatori determinano a due a due ∞^2 piani δ. Per un punto qualunque (di Σ_4) passano ventotto piani δ. Per trovare il numero dei piani δ secanti secondo rette un piano generico di Σ_4, ragioniamo come segue. La curva d'ordine otto di cui si parla poco sopra, possiede $\binom{7}{2} - 5 = 16$ corde incidenti una retta generica del [4] in cui essa è immersa. Prendendone, al solito, le forme polari, e proiettando dal punto O su Σ_4, si ha:

Esistono sedici piani δ secanti secondo rette un piano generico di Σ_4.

E analogamente si dimostra che:

Uno spazio generico di Σ_4, seca in una superficie rigata di grado quaranta, il sistema ∞^3 delle rette ciascuna comune a tre spazi iperosculatori di c_4.

5. La curva c_4 ha un nodo se il punto O (§ 4) giace sopra una corda di c; per cui possiamo (I, § 6) ritenere come dimostrato il seguente teorema:

La quintica razionale di [4] *dotata di nodo, è trasformata in sè stessa da cinque omografie involutorie con una retta e un piano di punti uniti.*

Se c_4 ha una cuspide, dei cinque punti di contatto dei suoi spazi stazionari, quattro sono infinitamente vicini, per cui concludiamo (I, § 6) che:

La quintica razionale di [4] *dotata di cuspide, è trasformata in sè stessa da una (sola) omografia involutoria, con una retta e un piano di punti uniti.*

Le congiungenti i punti della c_4 dotata di punto doppio, che sono coniugati in una omografia involutoria di Σ_4, avente c_4 come invariante, sono le generatrici di una rigata cubica normale (I, § 5), avente per direttrice l'asse dell'omografia.

È chiaro, però, che esiste un'altra specie di quintica razionale di [4], la quale non possiede alcun punto doppio, che è trasformata in sè stessa da una omografia involutoria, il cui asse è direttrice doppia per la rigata (razionale) del quarto ordine, avente per generatrici le congiungenti i punti coniugati di c_4 (I, § 5). Ma su tale argomento ritorneremo fra poco.

6. È noto *) che data una qualunque retta di Σ_4, resta senz'altro individuata sulla curva c_4 una involuzione g_5^2, la quale è **) coniugata ***) a quella che risulta secando c_4 cogli spazi passanti per la data retta. Ora si osservi che gl'iperpiani iperosculatori la quintica razionale normale c, secano secondo punteggiate omografiche due qualunque rette s (I, §§ 1 e 2). Ne segue che:

In Σ_4 esistono ∞^4 rette tali che la g_5^2 di c_4 determinata da ciascuna di esse, possiede una g_5^1 con quattro punti fissi; ciascuna di queste rette seca i cinque iperpiani stazionari di c_4, in un gruppo di punti che rimane proiettivo a sè stesso, al variare della retta. A queste ∞^4 rette appartengono le tangenti di c_4.

Una qualunque r delle ∞^4 rette ora dette, proiettata dal punto O (§ 4) dà un piano contenente una certa retta s; l'essere questa nell'iperpiano polare di O rispetto alla polarità Π, è condizione necessaria e sufficiente, affinchè il gruppo dei quattro punti fissi relativo ad r sia piano. Se ne conclude (I, § 4) che:

Le rette di Σ_4 ciascuna delle quali determina su c_4 una g_5^2, la quale possiede una g_5^1 con quattro punti fissi in uno stesso piano, sono le generatrici di una congruenza (3, 1) posta nello spazio dei punti di contatto dei cinque spazi stazionari.

7. Indichiamo con C_n^d una curva razionale d'ordine n immersa in uno spazio lineare S_d a d dimensioni ****): essa può considerarsi come

*) Berzolari, *Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, n° 10 [Annali di Matematica, serie II, tomo XXI (1893)].

**) Berzolari, l. c.

***) Castelnuovo, *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali*, etc., § 1, 14 [Atti del R. Istituto Veneto, serie VI, tomo IV (1886)].

****) Per questo § si tolga la restrizione fatta sulla parola *spazio* fin dal § 1 del cap. I.

proiezione in S_d della curva C razionale normale d'ordine n, fatta da un certo spazio Σ_{n-d-1}. Si indichi con Σ_d lo spazio polare di questo rispetto alla polarità che C determina in $[n]$. Se Ω è un'omografia di S_d che trasforma C_n^d in sè stessa, essa trasformerà pure in sè stessa l'involuzione *fondamentale* (STAHL) *) di C_n^d, e quindi essa determinerà su questa curva una omografia subordinata ω, che trasforma $n - d$ gruppi qualunque (linearmente indipendenti) dell'involuzione fondamentale, in altrettanti gruppi di questa medesima. Viceversa, sia ω una siffatta omografia fra i punti di C_n^d, essa sarà proiezione di un'altra omografia fra i punti di C, la quale è subordinata ad una omografia Ω' dell'$[n]$ di C, che trasforma $n - d$ iperpiani appartenenti a Σ_d, in altrettanti iperpiani siffatti.

Ne segue che Ω' trasforma $n - d$ punti (linearmente indipendenti) di Σ_{n-d-1}, in altri $n - d$ punti di questo stesso spazio. Ciò mostra che per Ω' lo spazio Σ_{n-d-1} è uno spazio unito, per cui ω determina in S_d una omografia che trasforma C_n^d in sè stessa. Concludiamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'omografia ω esistente fra i punti di C_n^d, determini nello spazio di questa una omografia che trasformi C_n^d in sè stessa, è che ω trasformi $n - d$ gruppi (linearmente indipendenti) dell'involuzione fondamentale di C_n^d, in altrettanti gruppi di questa medesima involuzione.

Per $d = n - 1$ l'involuzione fondamentale si riduce ad un sol gruppo, e precisamente al gruppo dei punti di contatto degl'iperpiani stazionari di C_n^d, per cui ritroviamo un teorema noto **).

8. Lo spazio iperosculatore c_4 in un punto P, seca di nuovo la curva in un altro punto P_1: lo spazio iperosculatore c_4 in P_1, sechi questa in P_2; e così via sino ad ottenere un certo punto P_n, che sarà chiamato *successivo* n^{esimo} di P. Esistono $4^n + 1$ punti P coincidenti col rispettivo P_n. I cinque punti stazionari appartengono a tutti i *gruppi*, se diremo *gruppo d'ordine n* quello costituito dai punti che coincidono col loro successivo n^{esimo}. Per $n = 2$ abbiamo che esistono sei coppie di punti di c_4, tali che lo spazio iperosculatore a c_4 in un punto di una qualunque di esse, passa per l'altro punto. Si hanno così *sei corde prin-*

*) Vedi pure BERZOLARI, l. c.

**) LORIA, l. c., 10.

cipali della c_4. Per n pari, gli estremi di queste corde fanno parte delle $4^n + 1$ coincidenze di cui poco sopra si parla.

9. Nel caso che la curva c_4 sia dotata di punto doppio, essa è suscettibile di una rappresentazione parametrica, tale che sia semplicissima la relazione che lega i parametri di cinque punti della curva posti in uno stesso spazio. Questa relazione è *)

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 = 1.$$

Ne segue che indicando con λ il parametro di un punto qualunque P di c_4, i parametri degli altri n punti che si ottengono conducendo successivamente in essi gli spazi iperosculatori c_4, sono λ^{-4}, $\lambda^{(-4)^2}$, $\lambda^{(-4)^3}$, ... , $\lambda^{(-4)^n}$. Se n è pari fra i punti che coincidono col loro successivo n^{esimo}, vi è certamente il punto doppio contato due volte, per cui non tenendone conto, il numero dei punti ora detti è in ogni caso $4^n + (-1)^{n-1}$, come del resto si deduce dall'equazione $\lambda = \lambda^{(-4)^n}$, cioè (1) $\lambda^{4^n+(-1)^{n-1}} = 1$. Pongasi $m = 4^n + (-1)^{n-1}$; questo numero m è sempre divisibile per 5: infatti se n è pari, 4^n terminerà col numero 6, e se n è impari, 4^n terminerà col numero 4. Segue che i punti stazionari di c_4 appartengono a tutti i gruppi, come si era già osservato nel paragrafo precedente.

Siano P_1, P_2, P_3, P_4 quattro punti di un gruppo d'ordine n: dico che il loro spazio seca ancora c_4 in un punto P_5 dello stesso gruppo. E infatti ciascuno dei parametri λ_i dei punti $P_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, è per ipotesi radice m^{esima} di 1, per cui anche $\lambda_5 = \dfrac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$ è una siffatta radice.

10. Si faccia $n = 2$: la (1) diventa $\lambda^{15} = 1$. Fra le radici di questa equazione sono le radici quinte di 1, che sono i parametri dei punti stazionari. Onde le *corde principali* (§ 8) di c_4 si riducono nella presente ipotesi, cioè che la curva c_4 è dotata di punto doppio, a cinque. Gli argomenti dei parametri degli estremi delle cinque corde principali, sono:

---

*) ZECCA, *Sopra una classe di curve razionali* III. [Giornale di Matematiche, vol. XXV (1887)].

$$
\begin{array}{ll}
\frac{2\pi}{15} & 11\frac{2\pi}{15} \\[4pt]
2\frac{2\pi}{15} & 7\frac{2\pi}{15} \\[4pt]
4\frac{2\pi}{15} & 14\frac{2\pi}{15} \\[4pt]
5\frac{2\pi}{15} & 10\frac{2\pi}{15} \\[4pt]
8\frac{2\pi}{15} & 13\frac{2\pi}{15},
\end{array}
$$

ove sono scritti in una stessa orizzontale, gli argomenti dei parametri spettanti agli estremi di una stessa corda principale. Osserviamo che, ogni qualvolta la somma di cinque di questi argomenti dà un multiplo di 2π, i cinque punti corrispondenti stanno in uno stesso spazio.

Indicando con $k\frac{2\pi}{15}$ e $h\frac{2\pi}{15}$ gli argomenti dei parametri relativi agli estremi di una stessa corda principale, si ha:

$$4k + h = 15n \quad \text{e} \quad k + 4h = 15n',$$

dove n e n' sono numeri interi. *Lo spazio di due corde principali passa per un punto stazionario,* giacchè si ha:

$$
\begin{aligned}
k + h + k_1 + h_1 &= 4k - 3k + h + 4k_1 - 3k_1 + h_1 \\
&= 15n - 3k + 15n_1 - 3k_1 = 15q - 3(k + k_1),
\end{aligned}
$$

onde lo spazio detto contiene il punto stazionario il cui parametro ha per argomento $(k + k_1)\frac{2\pi}{5}$.

III.

Quintica gobba razionale.

1. Sia c_5 una curva razionale del quinto ordine dello spazio Σ_3 a tre dimensioni. Essa può sempre (CLIFFORD) considerarsi come proiezione della quintica (razionale) normale, da una retta o. Dal § 1 del cap. I, si deduce che:

La sviluppabile osculatrice di c_5 è d'ordine otto, e di classe nove. La

curva c_3, *inoltre, è dotata di otto piani stazionari (a contatto quadripunto)* *).

Una quintica gobba razionale dotata di quattro piani stazionari singolari distinti, cioè a contatto di quart'ordine, ha le tangenti appartenenti ad un complesso tetraedrale (di Reye*) avente per tetraedro fondamentale, quello costituito dai detti piani stazionari singolari* (I, § 1).

Questo teorema vale pure per una curva gobba razionale d'ordine n, con quattro piani a contatto n-*punto*.

Si hanno due specie **) di quintiche gobbe razionali: le curve della prima specie contengono *una sola quadrisecante,* quelle della seconda specie contengono *infinite quadrisecanti, le quali sono le generatrici di una schiera rigata* (I, § 2).

2. Uno spazio generico di Σ_5 seca la varietà dei piani osculatori della quintica razionale normale c, in una curva razionale d'ordine nove, con otto cuspidi nei punti in cui quello spazio seca la superficie delle tangenti di c. Com'è noto, le trisecanti di una siffatta curva, sono le generatrici di una rigata di grado 56.

Prendendo ora le forme polari rispetto alla polarità nulla Π (I, § 1), segue che:

È 56 il grado della rigata costituita dalle rette, per ciascuna delle quali passano tre piani osculatori di c_3.

La curva d'ordine nove, di cui si parla in principio di questo paragrafo, è dotata di 13 quadrisecanti. Onde:

Esistono in Σ_3 *tredici rette per ciascuna delle quali passano quattro piani osculatori di* c_3.

Dal § 12 del cap. I, segue senz'altro che:

Le trisecanti di c_3 *formano una rigata razionale di grado otto* ***).

3. Sia c_3 trasformata in sè stessa da una omologia armonica di Σ_3, o, come brevemente diremo, sia c_3 *omologica.* La retta o (§ 1) deve incontrare in due punti una conica t (I, § 5); viceversa, ciò è sufficiente

---

*) Vedi, p. es., Berzolari, *Sulla curva gobba razionale del quinto ordine* (Mem. R. Acc. Lincei, 1893).

**) Bertini, *Sulle curve gobbe razionali di 5° ordine.* (Collect. math. in memoriam Dominici Chelini, pag. 312).

***) Bertini, l. c.

affinchè c_5 sia omologica. Ora si osservi che il piano osculatore c nel punto che questa ha in una qualunque conica t, seca il piano di questa secondo una retta. Per cui ogni retta del piano di t, è l'*unica* retta incidente il piano osculatore ora detto, e due determinate corde di c incidenti il detto piano di t. Se ne deduce che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè c_5 sia omologica, è che sia dotata di due punti doppi, uno (almeno) nodale; e che in uno dei due punti formanti la coppia armonica ad entrambi i punti doppi, la curva abbia una tangente d'inflessione. Questo punto sarà il centro d'omologia. Il piano d'omologia è quello che passa per i punti doppi, e per quel punto che insieme col centro d'omologia costituisce la coppia armonica a questi *).

La c_5 omologica ha un piano stazionario singolare, nel centro di omologia (I, § 7).

4. Con ragionamenti analoghi a quelli del § 6 del capitolo precedente, si vede subito che data una c_5 dotata di quattro piani stazionari singolari, scelta una retta generica di Σ_3, resta senz'altro determinata su c_5 una g_5^3, la quale contiene una sola g_5^1 con quattro punti fissi, che è l'involuzione *fondamentale* di c_5. Però:

Vi sono ∞^3 rette di Σ_3, tali che ciascuna delle loro g_5^3 corrispondenti su c_5, contengono ∞^1 g_5^1 ognuna dotata di quattro punti fissi. Queste ∞^3 rette costituiscono un complesso tetraedrale, la cui superficie singolare è formata dai quattro piani stazionari singolari. Le tangenti della curva appartengono a questo complesso.

5. Consideriamo la c_5 dotata di quattro piani stazionari singolari, i cui punti di contatto siano A, B, C, D. Con questi punti possiamo determinare su c_5 le seguenti involuzioni:

$$\omega_1 \equiv \frac{AC}{BD}, \qquad \omega_2 \equiv \frac{AB}{CD}, \qquad \omega_3 \equiv \frac{AB}{DC}.$$

La ω_1, p. es., trasforma involutoriamente il gruppo $ABCDM$ nel gruppo $BADCN$, essendo M ed N due certi punti di c_5. Ma entrambi questi gruppi appartengono all'involuzione fondamentale di c_5, osservato che

*) Questo teorema, enunciato un poco diversamente, è di CIANI, *Le curve gobbe razionali di quinto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie* [Rend. R. Ist. Lomb., serie II, vol. XXXVII (1904)].

questa involuzione ha i quattro punti fissi A, B, C, D; per cui ω_1 trasforma due (anzi infiniti) gruppi dell'involuzione fondamentale di c_3, in gruppi di questa medesima. Analogamente dicasi per ω_2 e ω_3. Concludiamo (II, § 7) che:

Se una quintica gobba razionale è dotata di quattro piani stazionari singolari, essa è trasformata in sè stessa da tre involuzioni assiali *).

6. Dicasi π il piano di tre punti A', B', C' della quintica razionale normale c, e siano α, β, γ gl'iperpiani iperosculatori di c in essi. I due iperpiani α e β si secano in uno spazio che ha con π un punto M' in comune. L'iperpiano μ polare di M' rispetto a Π, dovendo passare per A', B' e M', contiene tutto il piano π, per cui pure γ passerà per M'. L'omografia $\omega' \equiv \dfrac{A'\,B'\,C'}{B'\,C'\,A'}$ di cui indichiamo con E' e F' i punti uniti, determina in Σ_5 una collineazione Ω' per la quale è unito il piano π, e quindi anche unito sarà il piano π' polare di π. Ma M' giace in π, per cui μ conterrà π', e quindi π e π' avranno in comune il punto M', unito per Ω'. L'iperpiano unito μ seca c in altri due punti, i quali non potendo essere trasformati l'uno nell'altro dall'omografia non involutoria ω', saranno i punti uniti E' e F' di questa.

Uno spazio ξ di μ per π, ha la polare x in π' uscente da M'; lo spazio $x\pi$ ha per polare la retta $x' \equiv \xi\pi'$. Le rette del fascio (M', π') come x e x', sono coniugate in una stessa involuzione ordinaria: d e d_1 ne siano le rette doppie. La collineazione Ω' non può trasformare $d_1\pi$ in $d\pi$, giacchè allora dovrebbe pure trasformare $d\pi$ in $d_1\pi$, cioè questi due spazi formerebbero una coppia involutoria per l'omografia (non involutoria) binaria che Ω' determina fra gli spazi di μ uscenti da π. Dunque Ω' trasforma $d\pi$ in sè stesso, e $d_1\pi$ pure in sè stesso, cioè $d\pi$ e $d_1\pi$ sono gli spazi uniti della detta omografia binaria. Ma pure $E'\pi$ e $F'\pi$ sono evidentemente per questa spazi uniti, dunque deduciamo $d\pi \equiv E'\pi$, p. es., e $d_1\pi \equiv F'\pi$. Se ne conclude che ciascuno degli spazi $E'\pi$ e $F'\pi$ contiene la propria polare.

---

*) Ciani, *Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintica gobba razionale invariante*, 8 [Rend. R. Ist. Lomb., serie II, vol. XXXVII, (1904)]. Questo teorema si generalizza per una curva gobba razionale d'ordine n, con quattro piani stazionari singolari, cioè a contatto n-punto.

7. Sia c_3 una quintica gobba razionale dotata di quattro piani stazionari singolari, i cui punti di contatto indicheremo con A, B, C, D. Se il gruppo $ABCD$ è equianarmonico, la curva c_3 si chiamerà *equianarmonica*.

Siano A', B', C', D' i punti di c, dei quali A, B, C, D sono proiezioni: pure il gruppo $A'B'C'D'$ è equianarmonico, se, come supponiamo, la curva c_3 è equianarmonica. Ma allora considerando, p. es., l'omografia $\omega' \equiv \frac{A'B'C'}{B'C'A'}$ esistente fra i punti di c, si vede che essa ammette come unito il punto D', e quindi per quanto si disse nel paragrafo precedente, lo spazio $A'B'C'D'$ contiene la propria polare rispetto a Π, polare che è precisamente la retta o da cui si proietta c per ottenere la data c_3 di Σ_3. Viceversa è chiaro, sempre per quanto si disse nel paragrafo precedente, che se $A'B'C'D'$ è uno spazio che contiene la propria polare rispetto a Π, il gruppo $A'B'C'D'$ è equianarmonico. Se ne conclude che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una quintica gobba razionale con quattro piani stazionari singolari, sia equianarmonica, è che i punti di contatto di questi piani, siano in una stessa retta *).

La c_3 equianarmonica oltre di essere trasformata in sè stessa dalle involuzioni assiali di cui si parla nel § 5, *è* (II, § 7) *trasformata in sè stessa dalle collineazioni di Σ_3, determinate dalle seguenti omografie binarie:*

$$\omega_1 \equiv \frac{ABCD}{ACDB}; \quad \omega_2 \equiv \frac{ABCD}{ADBC}; \quad \omega_3 \equiv \frac{BACD}{BCDA}; \quad \omega_4 \equiv \frac{BACD}{BDAC};$$

$$\omega_5 \equiv \frac{CABD}{CBDA}; \quad \omega_6 \equiv \frac{CABD}{CDAB}; \quad \omega_7 \equiv \frac{DABC}{DBCA}; \quad \omega_8 \equiv \frac{DABC}{DCAB}.$$

8. Se i quattro punti di contatto dei piani stazionari singolari di c_3, formano un gruppo armonico, la curva c_3 si dirà *armonica.* La c_3 armonica è trasformata in sè stessa dalle involuzioni assiali di Σ_3, determinate dalle $\omega_1 \equiv AB$ e $\omega_2 \equiv CD$, se sono coniugati (armonici) A e B (e quindi C e D).

9. La c_3 sia dotata di due tangenti d'ondulazione: allora la sua in-

---

*) CIANI, l. c., 13.

voluzione fondamentale ha quattro punti fissi, divisi in due coppie di punti infinitamente vicini, e coincidenti coi punti di contatto A e B delle due tangenti d'ondulazione.

Qualunque involuzione ω fra i punti di c_5, che abbia come coniugati A e B, trasforma (involutoriamente) un gruppo dell'involuzione fondamentale di c_5, in un altro gruppo di questa medesima involuzione. Per cui ω determina in Σ_3 un'involuzione assiale, per la quale è unita la curva c_5. Concludiamo che:

La quintica gobba razionale dotata di due tangenti d'ondulazione, è trasformata in sè stessa da una semplice infinità di involuzioni assiali, rispetto alle quali son coniugate le due tangenti d'ondulazione.

Vogliamo ora calcolare il grado della rigata (razionale) θ, le cui generatrici sono gli assi di queste ∞^1 involuzioni assiali.

Per θ la c_5 è semplice, e la retta AB è una direttrice quintupla (I, § 6), per cui il richiesto grado di θ è *otto*.

Le generatrici di θ sono accoppiate secondo un'involuzione ordinaria, nella quale son coniugate due generatrici assi di una stessa involuzione assiale trasformante c_5 in sè stessa. Per costruire gli assi di una qualunque involuzione assiale siffatta, basterà scegliere su c_5 due punti E ed F coniugati armonici rispetto ad A e B: la retta uscente da E e incidente AB e la tangente a c_5 in F, e quella uscente da questo punto e incidente AB e la tangente a c_5 in E, sono i due assi richiesti.

10. Sempre in virtù del teorema del § 7 del cap. II, oltre delle involuzioni assiali di cui si parla nel paragrafo precedente,

la c_5 con due tangenti d'ondulazione è trasformata in sè stessa da una semplice infinità di omografie quaternarie (una sola delle quali involutoria), per le quali sono unite le tangenti d'ondulazione.

Indichiamo con p una generica di queste omografie, e con i una generica delle involuzioni assiali di cui si parla nel paragrafo precedente. Evidentemente il prodotto di due delle involuzioni i, è un'omografia p; viceversa *ogni omografia p è in infiniti modi prodotto di due involuzioni i.* Infatti un'omografia p dovendo avere i punti A e B come elementi uniti, resta perfettamente determinata se si assegna una sua coppia qualunque di punti corrispondenti P e Q di c_5. Ma scelto un altro punto arbitrario R di c_5, i due punti P e R sono coniugati in una determinata i_1 delle involuzioni i; e così pure Q e R sono coniugati in un'altra deter-

minata involuzione i_2. In allora la data omografia p è, evidentemente, il prodotto delle due involuzioni i_1 e i_2 *).

11. Consideriamo ora una quintica gobba razionale c_3 dotata di due cuspidi A e B, e di un piano stazionario singolare per ciascuna cuspide. La sua involuzione fondamentale avrà i due punti A e B come fissi, e son due gruppi di questa involuzione $A + 4B$ e $4A + B$. Per cui ogni involuzione fra i punti di c_3, per la quale sian coniugati A e B, trasforma (involutoriamente) l'uno nell'altro questi due gruppi. L'involuzione fondamentale è pure evidentemente trasformata in sè stessa, da ogni omografia esistente fra i punti di c_3, per la quale siano uniti i punti A e B. Se ne conclude (II, § 7) che:

La quintica gobba razionale con due cuspidi e un piano stazionario singolare per ciascuna cuspide, è trasformata in sè stessa da ∞^1 involuzioni assiali, per ciascuna delle quali son coniugati i due punti cuspidali; e da ∞^1 omografie quaternarie (una sola delle quali involutoria), per ciascuna delle quali sono uniti i punti cuspidali **).

IV.

Quintica piana razionale.

1. Sia c_2 una quintica razionale del piano Σ_2. Essa è (Clifford) sempre proiezione della quintica razionale normale c di Σ_5, fatta da un piano ω di questo.

Se ω è un piano generico, esso contiene (I, § 11) una sola retta l, se invece giace in uno spazio quadrisecante c, contiene ∞^1 rette l; e viceversa. Ne deduciamo che:

In ogni quintica piana razionale non dotata di punto quadruplo, esiste una g_4^1 perfettamente individuata, tale che ciascun suo gruppo giace in una retta di un fascio di second'ordine, anch'esso perfettamente individuato.

*) I teoremi di questo paragrafo si generalizzano facilmente, per una curva gobba razionale d'ordine n, con due tangenti a contatto $(n - 1)$-punto.

**) Terminiamo questo cap. osservando che in Σ_3 esistono ∞^2 rette che sono ad un tempo, rette l e rette s. Per cui sembra che il Ciani sia incorso in una piccola svista, quando dice (l. c. 9), che la c_3 con quattro piani stazionari singolari, ha una *sola* quadrisecante. Più evidente è l'altra svista, nel dire che la detta curva non può avere punti doppi.

Inoltre:

In una quintica piana razionale dotata di punto quadruplo, esistono ∞^1 *di siffatte* g_4^1.

Osserviamo che in ogni caso, cioè data una quintica piana razionale qualunque, le rette di un tale fascio di second'ordine sono riferite biunivocamente ai punti della quintica, ove a un punto P di questa si faccia corrispondere quella retta del fascio che passa per P, e contiene un gruppo di g_4^1, di cui P *non* fa parte.

2. L'involuzione fondamentale di c_2 è la g_5^2 coniugata all'altra g_5^2 secata sulla curva da tutte le rette del piano Σ_2.

Supponiamo che la c_2 sia dotata di tre punti d'iperosculazione A, B, C. Per quanto si disse nel § 6 del cap. precedente, *questi tre punti sono allineati* *).

L'involuzione fondamentale di c_2 ha i tre punti fissi A, B, C, essendo suo gruppo quello formato da questi e da altri due punti qualunque della curva. Ne segue, per il teorema del § 7 del cap. II, che:

Una quintica piana razionale dotata di tre punti d'iperosculazione, è trasformata in sè stessa dalle omografie ternarie determinate in Σ_2,

a) *dalle tre involuzioni:*

$$\omega_1 \equiv A\begin{matrix}B\\C\end{matrix}, \qquad \omega_2 \equiv B\begin{matrix}A\\C\end{matrix}, \qquad \omega_3 \equiv C\begin{matrix}A\\B\end{matrix};$$

b) *dalle omografie* (*non involutorie*):

$$\omega_4 \equiv \frac{A\,B\,C}{B\,C\,A}, \qquad \omega_5 \equiv \frac{A\,B\,C}{C\,A\,B}$$ **).

3. Se il piano ω (§ 1) che proietta c in c_2, seca secondo una retta il piano τ di una conica t, e in un punto quello τ_1 della conica t_1 associata (I, § 5) a t, la curva c_2 è trasformata in sè stessa da un'omologia armonica, o come diremo per amor di brevità, la c_2 è *omologica*. L'asse di omologia conterrà due punti doppi (uno almeno nodale), e uno M dei due punti che formano la coppia armonica ad entrambi questi

*) Ciò del resto rientra in un corollario di un noto teorema di CARNOT. Vedi SALMON, *Curve piane*. Vedi pure BRUSOTTI, *Sulle curve piane razionali dotate di tre punti d'iperosculazione* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVII (1904), pag. 888], n° 1.

**) BRUSOTTI, l. c., n° 2.

punti doppi; l'altro N sarà il centro dell'omologia. In questo la curva c_2 ha un flesso, e i due punti in cui la tangente stazionaria seca ulteriormente la c_2, sono separati armonicamente da M ed N. Viceversa, affinchè c_2 sia omologica è sufficiente che la congiungente due punti doppi (uno almeno nodale), sechi ancora la c_2 in uno M, dei due punti M ed N che formano la coppia armonica ad entrambi i detti punti doppi; inoltre che in N la curva abbia un flesso, e la tangente d'inflessione sechi ancora la curva in due punti separati armonicamente da M ed N. Infatti la prima parte della condizione ora enunciata, dà che il piano ω incontra in un punto τ_1, se t_1, p. es., contiene il punto di c che si proietta in M. La seconda parte, poi, ci dice che pure τ incontra (almeno) in un punto il piano ω. Ora, se questo punto fosse distinto da quei due secondo cui τ seca le due corde di c incidenti ω, e poste in uno stesso iperpiano con M, esso τ giacerebbe nell'iperpiano $\tau_1 \omega$, e ciò è assurdo. Dunque deduciamo che τ seca ω lungo la retta congiungente i due punti in cui ω è secato dalle due dette corde di c. Ciò dimostra l'assunto. Concludiamo che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una quintica piana razionale sia omologica, è che la congiungente due punti doppi (uno almeno nodale) di questa, sechi ancora la curva in uno dei due punti che formano la coppia armonica ai detti punti doppi. Inoltre nell'altro punto di questa coppia la curva abbia un flesso, la cui tangente sechi ancora la curva in due punti separati armonicamente, dai due punti formanti la detta coppia.

V.

Le rigate gobbe razionali del quinto grado.

1. È oramai cosa notissima la rappresentazione dello spazio (ordinario) rigato, sulla forma quadratica Γ di Σ_5 *).

Una rigata razionale ρ dello spazio ordinario Σ_3, del quinto ordine, vien rappresentata su Γ da una quintica (razionale). Segue subito, per lo studio fatto nei tre capitoli precedenti, che le rigate razionali gobbe del quinto grado, si dividono nei *tre tipi* seguenti:

*) KLEIN, *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* [Mathem. Annalen, vol. V (1872), pag. 261-277], § 1.

1° *tipo:* ρ giace in una congruenza lineare;

2° *tipo:* ρ è immersa in un complesso lineare;

3° *tipo:* ρ non giace in un complesso lineare.

2. Cominciamo a studiare le ρ del 1° tipo. In tale ipotesi, ρ è rappresentata su Γ, da una certa quintica gobba razionale c_3. Questa dovendo giacere sopra una quadrica ordinaria, o è dotata di ∞^1 quadrisecanti, cioè è di 2ª specie, ovvero è di 1ª specie, ma contiene due punti doppî, ovvero, infine, possiede un punto triplo. Possiamo dunque dividere il 1° tipo, nei tre seguenti sottotipi:

a): ρ è dotata di ∞^1 quaterne di generatrici formanti fasci;

b): ρ possiede due generatrici doppie;

c): ρ possiede una generatrice tripla.

Consideriamo il sottotipo *a*): dallo spazio di c_3 si possono condurre due iperpiani tangenti Γ in due punti P e P'. Dei due sistemi di piani di Γ uscenti da P (o da P'), uno è secato dallo spazio Σ_3 di c_3 secondo le quadrisecanti di questa curva; osserviamo inoltre che due piani, uno per P e uno per P', di siffatti sistemi, avendo in comune una retta, rappresentano un *punto* e un *piano* di Σ_3. Se ne conclude che:

Le direttrici della congruenza lineare in cui giace una rigata ρ [*del* 1° *tipo e del sottotipo a*)], *sono una direttrice quadrupla e una direttrice semplice per questa stessa rigata* ». [Queste ρ appartengono *) al tipo I di Schwarz].

Analogamente:

Una rigata ρ *del* 1° *tipo e del sottotipo b*), *è dotata di una direttrice doppia e di un'altra tripla, e di due generatrici doppie* (tipo V di Schwarz).

Un caso particolare del sottotipo *b*), si ottiene nell'ipotesi che c_3 sia in un cono quadrico ordinario (il cui vertice è un punto semplice di essa). In allora si ottiene una rigata ρ posta in una congruenza lineare dotata di una sola direttrice. Questa è direttrice tripla per ρ, e delle tre generatrici appartenenti ad un suo punto o piano qualunque, una coincide costantemente con essa medesima.

Infine

Una rigata ρ *del* 1° *tipo e del sottotipo c*), *possiede una direttrice*

*) Schwarz, *Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades* [Journ. f. Math., LXVII (1867)].

quadrupla, tale che delle quattro generatrici uscenti da un suo punto qualunque, tre coincidono costantemente con essa medesima.

3. Consideriamo ora le rigate ρ del 2° tipo. Una siffatta ρ è rappresentata in Γ da una curva c_4 immersa in uno spazio Σ_4 da quattro dimensioni.

È chiaro che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rigata ρ sia del 2° tipo, è che possieda (solamente) tre generatrici formanti un fascio.

Possiamo distinguere due sottotipi:

a) Il complesso lineare in cui ρ è immersa, è speciale.

b) Il detto complesso lineare non è speciale.

Esaminiamo il sottotipo *a*). La curva rappresentativa c_4 di ρ, è dunque immersa in un iperpiano Σ_4 tangente la forma quadratica Γ in un certo punto P. Ed ora possiamo distinguere due *specie* di rigate ρ del 2° tipo e del sottotipo *a*), a secondo che i piani del cono $\Gamma\Sigma_4$ secano c_4 in quattro punti quelli di un sistema, e in un punto quelli dell'altro; ovvero, in tre punti quelli dell'uno, e in due quelli dell'altro sistema. Concludiamo dunque:

Una rigata ρ del 2° tipo, del sottotipo a) e di 1ª specie, è tale che ad un punto (o piano) dell'asse del complesso lineare speciale in cui è immersa, appartengono quattro generatrici della rigata. (Appartiene al tipo I di Schwarz). *Una ρ del 2° tipo, del sottotipo a) e di 2ª specie, è tale che ad un punto (o piano) qualunque dell'asse del complesso, appartengono tre generatrici della rigata.* (Tipi III, IV, VI, VII, X di Schwarz).

Il punto P sopra detto, nell'ipotesi che c_4 rappresenti una ρ di 1ª specie, appartiene alla rigata cubica normale φ (II, § 1), luogo dei punti per ciascuno dei quali passano ∞^1 piani quadrisecanti c_4. Per cui il cono $\Gamma\Sigma_4$ passa per φ. Ne deduciamo che:

Data una rigata ρ del 2° tipo, del sottotipo a) e di 1ª specie, le rette ciascuna delle quali appartiene ad ∞^1 schiere rigate contenenti quattro generatrici della rigata ρ, costituiscono una congruenza (1, 2) o (2, 1), secondo che appartengano quattro generatrici di ρ ad ogni punto o ad ogni piano della direttrice rettilinea di questa rigata.

4. Supponiamo ora che ρ sia del 2° tipo, del sottotipo *a*) e di 2ª specie. Allora la relativa curva c_4 vien proiettata da P sopra uno spazio

generico, in una curva dotata di due punti doppi (dovendo giacere sopra una quadrica), per cui:

Una rigata ρ del 2° tipo, del sottotipo a) e di 2ª specie, possiede due coppie di generatrici, ciascuna formante fascio coll'asse del complesso in cui è immersa.

Le rette per ciascuna delle quali passano ∞^1 schiere rigate contenenti quattro generatrici di ρ, costituiscono una rigata del sesto grado.

5. Sia ρ del 2° tipo e del sottotipo *b*): per essa vale il teorema ora enunciato. In una schiera rigata qualunque (ma appartenente al complesso in cui è immersa ρ) esistono (II, § 1) tre coppie di rette, ciascuna appartenente ad una schiera rigata che possiede quattro generatrici di ρ. Questo teorema vale pure per le rigate ρ del 2° tipo, del sottotipo *b*) e di 2ª specie.

6. Sia, finalmente, ρ del terzo tipo: *esistono tre sue generatrici (non formanti fascio), passanti per uno stesso punto, e tre altre appartenenti ad uno stesso piano.*

Dal § 2 del cap. I segue:

Data una qualunque coppia generica di rette, essa appartiene ad una sola congruenza lineare avente quattro generatrici di ρ. Vi sono poi ∞^6 coppie di rette, tali che ciascuna di esse appartiene ad ∞^1 congruenze lineari siffatte. Tutte queste ∞^1 congruenze generano un complesso quadratico avente come doppie le due rette di quella coppia.

Chiameremo *singolari* tali coppie di rette.

In una schiera rigata esiste una sola coppia singolare; ovvero ne esistono ∞^1, e precisamente una qualunque generatrice della schiera, forma coppie singolari con due (sole) generatrici di questa medesima (I, §§ 11 e 8). Osserviamo, inoltre, che *condizione necessaria e sufficiente affinchè nella data schiera rigata esistano ∞^1 coppie singolari, è che questa appartenga alla congruenza lineare individuata da quattro generatrici qualunque di ρ* (I, § 8).

7. Il complesso lineare individuato da cinque generatrici successive di ρ, sarà chiamato *iperosculatore*. Data una congruenza lineare, esiste, in generale, una sola coppia di rette appartenente ad essa, e per cui passino quattro complessi lineari iperosculatori (I, § 2). Se poi di queste coppie

di rette [illegible], che appartengono ad una rigata [illegible] generale del quarto grado.

Dato un complesso lineare, esistono in esso [illegible] coppie di rette, ciascuna coppia appartenente a quattro complessi lineari [illegible] *formano una congruenza del terzo grado*, [illegible] (I, § 4).

Una retta generica r dello spazio di ρ, fa parte di [illegible] coppie singolari (§ 6). La retta r, poi, appartiene a *sei* fasci lineari, due qualunque rette dei quali, formano una coppia singolare.

8. Terminiamo questo ultimo capitolo, osservando che i tipi II, VIII e IX di Schwarz, equivalgono ai nostri: tipo 2°, sottotipo *b*), e 1° tipo

Catania, agosto 1904.

Giuseppe Marletta

DISTANZA ED ANGOLO DI ENTI COMPLESSI.

Nota di **Giuseppe Marletta**, in Catania

Adunanza dell'11 dicembre 1904.

In questa breve Nota si propongono due formole, indipendenti da qualunque sistema di coordinate, per esprimere la *distanza* di due punti complessi, e l'*angolo* di due rette complesse. I punti immaginari e le rette immaginarie, s'intendono definiti al modo di STAUDT *).

I.

1. Per quello che segue rappresenteremo un punto reale A, mediante l'involuzione parabolica avente A per punto singolare, e avente per sostegno una qualunque delle rette (reali) uscenti da questo punto. Col nome di *punto complesso* intenderemo un punto reale o immaginario.

Se indichiamo con $-k^2 (\leq 0)$ la potenza dell'involuzione (ellittica o parabolica) inerente al punto complesso A, chiameremo *potenza* di questo punto la radice quadrata k di k^2, presa col segno $+$ o col segno $-$, secondo che il senso dell'involuzione inerente ad A, è il senso positivo o il senso negativo della retta (reale) sostegno del punto A **).

---

*) *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Nürnberg, 1856-60.

**) Affinchè in ogni retta dello spazio resti fissato un senso da riguardare ad es. come positivo, basta assegnare una semisfera col suo centro; fare astrazione dalla metà dell'unico circolo massimo in essa contenuto, e considerare uno solo degli estremi del diametro di detto semicerchio.

Si osservi che se, muovendosi r intorno al punto C, l'angolo delle due rette r e CC_1 passerà bruscamente dal valore α al valore $180^\circ - \alpha$, cambieranno *contemporaneamente* di segno ambo i numeri $\cos\alpha$ e k.

Dati due punti complessi al finito P e P_1, indichiamo con h il numero (positivo o negativo) che misura il segmento orientato CC_1 determinato dai punti centrali C e C_1 delle due involuzioni (ellittiche o paraboliche) inerenti a P e P_1; e indichiamo con k e k_1 le potenze di questi punti. Inoltre se i punti (reali) C e C_1 sono distinti, indichiamo con α l'angolo formato dai sensi positivi delle due rette r e CC_1, ove r è il sostegno (reale) di P. Analogo significato abbiano α_1 e r_1 rispetto a P_1. L'espressione

$$(1)\quad \overline{PP}_1 = \pm [h^2 - (k^2 + k_1^2) + 2kk_1 \cos \varepsilon + 2h(k \cos \alpha - k_1 \cos \alpha_1) i]^{\frac{1}{2}} \;{}^{*})$$

presa col segno $+$ o col segno $-$, secondo che per andare da C a C_1 percorrendo il segmento (finito) CC_1, si va nel senso positivo o in quello negativo della retta CC_1, si chiamerà *distanza* dei punti P e P_1, presi nell'ordine scritto. La lettera ε della (1) indica l'angolo formato dai sensi positivi delle rette r e r_1. Se P e P_1 sono entrambi reali, la (1) si riduce a

$$\overline{PP}_1 = \pm [h^2]^{\frac{1}{2}} = \pm |h|.$$

2. Supponiamo, in particolare, che coincidano i sostegni r e r_1 di P e P_1; allora la (1) diventa

$$\overline{PP}_1 = \pm [h^2 - (k^2 + k_1^2) + 2kk_1 + 2h(k - k_1)i]^{\frac{1}{2}},$$

cioè

$$(2)\quad \overline{PP}_1 = \pm [h^2 - (k - k_1)^2 + 2h(k - k_1)i]^{\frac{1}{2}} = \pm [|h| \pm |k - k_1| i],$$

ove dei due segni entro parentesi, si deve scegliere (com'è noto) il superiore o l'inferiore, secondo che $h(k - k_1)$ è un numero positivo o un numero negativo.

Se dei due punti P e P_1 uno solo, p. es. P, è reale, la (1) diventa:

$$\overline{PP}_1 = \pm [h^2 - k_1^2 - 2ihk_1 \cos \alpha_1]^{\frac{1}{2}};$$

e se inoltre il punto P giace precisamente sul sostegno r_1 di P_1 (pur rimanendo distinto da C_1), la (1) diventa:

$$\overline{PP}_1 = \pm [h^2 - k_1^2 - 2ihk_1]^{\frac{1}{2}} = \pm [|h| \pm |k_1| i],$$

*) In generale, col simbolo $[m + in]^{\frac{1}{2}}$ indichiamo quello dei due valori di $\sqrt{m + in}$, che ha positiva la parte reale.

ove dei due segni dentro parentesi, bisogna prendere il superiore o l'inferiore, secondo che è $bk_1 < 0$ ovvero $bk_1 > 0$.

Nell'ipotesi di $b = 0$, α e α_1 perdono significato, e però noi assumeremo per definizione in tale ipotesi:

$$\overline{PP}_1 = \pm [-(k^2 + k_1^2) + 2kk_1 \cos \varepsilon]^{\frac{1}{2}};$$

di modo che se coincidono allora i sostegni (reali) dei due punti P e P_1, si ha:

$$\overline{PP}_1 = \pm [-(k^2 + k_1^2) + 2kk_1]^{\frac{1}{2}} = \pm [|k - k_1| i] \text{ *)}.$$

Ma se i due punti P e P_1 son coniugati, si ha $k_1 = -k$, per cui $\overline{PP}_1 = \pm 2|k| i$, e quindi possiamo dire che a prescindere dal segno e dall'unità immaginaria, la distanza di due punti coniugati è eguale a quella (anch'essa considerata senza segno) dei due punti simmetrici rispetto al punto centrale dell'involuzione comune ai due punti, e in questa coniugati.

3. In una retta reale t consideriamo due punti complessi P e P_1; se per es. il senso positivo di t è quello del segmento orientato CC_1, si ha (§ 2) $\overline{PP}_1 = + [b \pm |k - k_1| i]$, dove dei due segni entro parentesi sarà scelto il superiore o l'inferiore, secondo che è $b(k - k_1) > 0$ ovvero $b(k - k_1) < 0$. D'altra parte si ha pure in quel caso

$$\overline{P_1 P} = - [|-b| \pm |k_1 - k| i],$$

dove dei due segni si prenderà il segno $+$ se è $-b(k_1 - k) > 0$, e il segno $-$ se è $-b(k_1 - k) < 0$. Concludiamo dunque che è $\overline{PP}_1 = -\overline{P_1 P}$.

Si osservi, intanto, che si può sempre scrivere $\overline{PP}_1 = \overline{CC}_1 + (k - k_1)i$; la cosa è evidente per la parte reale del secondo membro, in quanto all'altra si ragioni come segue. Se è $k > k_1$, si ha $|k - k_1| = k - k_1$, e quindi se è $b > 0$, essendo $b(k - k_1) > 0$, nella relazione (2) del § precedente, bisogna scegliere il segno $+$ sia fuori che dentro parentesi, e analogamente, se è $b < 0$, bisognerà scegliere, nella detta relazione, il segno $-$ sia dentro che fuori parentesi. Se invece è $k < k_1$, si ha $|k - k_1| = -(k - k_1)$, e quindi se è $b > 0$, essendo $b(k - k_1) < 0$, bisogna scegliere nella detta relazione, il segno $+$ fuori parentesi, e il segno $-$ dentro; e, analogamente, se è $b < 0$, essendo $b(k - k_1) > 0$,

*) In generale con $[-m^2]^{\frac{1}{2}}$ indichiamo $+ |m| i$.

bisognerà scegliere il segno — fuori parentesi, e il segno + dentro. In ogni caso è facile verificare quanto si voleva dimostrare.

4. Sia, ora, P_2 un altro punto complesso della retta t del § precedente, indichiamo con C_2 il suo punto centrale, e con $-k_2^2 (\leq 0)$, la potenza dell'involuzione a P_2 inerente. Infine k_2 rappresenti la radice quadrata di k_2^2, presa col segno + o col segno —, secondo che il senso inerente a P_2, è quello positivo o quello negativo (della retta t). Si ha (§ 3):

$$\overline{PP_1} = \overline{CC_1} + (k - k_1)i; \qquad \overline{P_1P_2} = \overline{C_1C_2} + (k_1 - k_2)i;$$
$$\overline{P_2P} = \overline{C_2C} + (k_2 - k)i.$$

Ma giacchè i punti C, C_1 e C_2 sono reali, è $\overline{CC_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C} = 0$, dunque deduciamo:

$$\overline{PP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P} = 0.$$

Mercè questa relazione si può dimostrare quest'altra (di Eulero pei punti reali):

$$\overline{PP_1}.\overline{P_2P_3} + \overline{P_1P_2}.\overline{PP_3} + \overline{P_2P}.\overline{P_1P_3} = 0.$$

5. Dati tre assi (reali) cartesiani ortogonali OX, OY, OZ, assumeremo come coordinate x_i, y_i, z_i di un punto complesso P_i, le distanze (munite di segni) $\overline{OP'_i}$, $\overline{OP''_i}$, $\overline{OP'''_i}$, essendo P'_i, P''_i, P'''_i le proiezioni del punto P_i sugli assi x, y, z fatte rispettivamente dalle rette improprie dei piani yz, zx, xy. Vogliamo dimostrare che dati due punti complessi quali si vogliano P_1 e P_2, si ha sempre:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

A tal fine, indichiamo con C'_1, C''_1, C'''_1 i punti centrali delle involuzioni inerenti a P'_1, P''_1, P'''_1; e diamo significato analogo a C'_2, C''_2, C'''_2 circa i punti P'_2, P''_2, P'''_2. Inoltre si indichino con k'_1, k''_1, k'''_1, le potenze dei punti P'_1, P''_1, P'''_1, e con k'_2, k''_2, k'''_2 le potenze dei punti P'_2, P''_2, P'''_2. Infine si ponga $h_1 \equiv \overline{C'_2C'_1}$, $h_2 \equiv \overline{C''_2C''_1}$, $h_3 \equiv \overline{C'''_2C'''_1}$. Ciò posto si ha (in virtù del § 3):

$$x_1 - x_2 = h_1 - i(k'_1 - k'_2); \qquad y_1 - y_2 = h_2 - i(k''_1 - k''_2);$$
$$z_1 - z_2 = h_3 - i(k'''_1 - k'''_2).$$

Da cui:

$$
\begin{aligned}
(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = {} & h_1^2-(k_1'-k_2')^2-2ih_1(k_1'-k_2') \\
& +h_2^2-(k_1''-k_2'')^2-2ih_2(k_1''-k_2'') \\
& +h_3^2-(k_1'''-k_2''')^2-2ih_3(k_1'''-k_2''') \\
= (h_1^2+h_2^2+h_3^2) & -(k_1'^2+k_1''^2+k_1'''^2)-(k_2'^2+k_2''^2+k_2'''^2) \\
+2(k_1'k_2'+k_1''k_2''+ & k_1'''k_2''')-2i(h_1k_1'+h_2k_1''+h_3k_1''') \\
+2i(h_1k_2'+h_2k_2''+ & h_3k_2''').
\end{aligned}
$$

Indicando ora con C_1 e C_2 i punti centrali delle involuzioni inerenti ai punti P_1 e P_2, chiamando k_1 e k_2 le potenze di questi punti, e ponendo $h \equiv \overline{C_2C_1}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
& (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \\
= h^2-k_1^2-k_2^2 & +2k_1k_2(\cos r_1x\cos r_2x+\cos r_1y\cos r_2y+\cos r_1z\cos r_2z) \\
& -2ihk_1(\cos hx\cos r_1x+\cos hy\cos r_1y+\cos hz\cos r_1z) \\
& +2ihk_2(\cos hx\cos r_2x+\cos hy\cos r_2y+\cos hz\cos r_2z) \\
& = h^2-(k_1^2+k_2^2)+2k_1k_2\cos r_1r_2 \\
& -2ih(k_1\cos hr_1-k_2\cos hr_2)=\overline{P_1P_2^2}\ ^{*)}. \qquad \text{C. V. D.}
\end{aligned}
$$

II.

1. Ogni retta reale dello spazio sia orientata come nel capitolo precedente, e in ogni piano reale sia dato un senso di rotazione da chiamar positivo **).

Una retta reale sarà rappresentata mediante una qualunque involuzione parabolica di raggi, avente quella retta per raggio singolare. Ciò posto, si consideri l'involuzione (parabolica o ellittica) inerente ad una retta r (reale, o immaginaria di prima specie). Se non è circolare, essa possiede un (solo) raggio perpendicolare al suo coniugato, e bisecante

---

*) Con procedimento analogo si può dimostrare la seguente relazione più generale: $\overline{P_1P_2^2} = \Phi(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$; dove gli assi (cartesiani) sono in qual si voglia modo inclinati fra loro, e la funzione Φ è quella forma quadratica ternaria, che di solito è considerata negli ordinari trattati di geometria analitica. (Vedi, p. es., D'OVIDIO, *Geometria analitica*, Torino, 1896).

**) Affinchè sopra ogni piano reale sia dato un senso di rotazione da chiamar *positivo*, basta fissare come al capitolo precedente, un senso positivo sopra ogni retta, e in particolare sulla normale a quel piano, e poi togliere in qualità di *positive*, le rotazioni *sinistrorse*.

l'angolo acuto (completo) formato da certi due raggi coniugati. Il raggio ora detto si chiamerà *raggio principale* della retta r. Quando poi l'involuzione di r sia circolare, assumeremo come raggio principale uno qualunque dei raggi del fascio inerente ad essa. Osserviamo che se la retta r è reale, essa coincide col suo raggio principale *).

Sia $\operatorname{tg} om . \operatorname{tg} om_1 = -\lambda^2 (\angle 0)$, essendo o il raggio principale di r, ed m, m_1 due rette coniugate nell'involuzione di r: chiameremo *potenza* della retta r, la radice quadrata λ di λ^2, presa col segno $+$ o col segno $-$, secondo che il senso dell'involuzione di r, è quello delle rotazioni positive o negative, del piano (reale) sostegno di r.

2. Date due rette r ed r' reali o immaginarie di prima specie, chiameremo *angolo* di esse, l'angolo complesso il cui coseno è dato dalla relazione

$$(1) \quad \cos rr' = \frac{\cos oo' - \lambda\lambda' \cos o_1 o'_1 - i(\lambda \cos o_1 o' + \lambda' \cos o o'_1)}{[(1-\lambda^2)(1-\lambda'^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

dove o è il raggio principale della retta r, o_1 è il coniugato di o nell'involuzione di questa, e dove λ è la potenza di questa medesima retta. Le lettere o', o'_1 e λ' hanno significati analoghi circa la retta r'.

Se una (almeno), p. es. r', delle rette r, r' possiede un'involuzione circolare, sembrerebbe che il valore dato a $\cos rr'$ dalla (1) resti indeterminato, tale essendo per definizione (§ 1) il raggio principale di r'. Ma così non è, giacchè, come ora vogliamo dimostrare, è, in tale ipotesi, $\cos rr' = \infty$, *qualunque* sia il raggio principale scelto per r'; ovvero è $\cos rr' = \frac{0}{0}$, *qualunque* sia il detto raggio principale.

Infatti scelto o' per raggio principale, sia

$$\cos oo' - \lambda \cos o_1 o'_1 - i(\lambda \cos o_1 o' + \cos oo'_1) = 0,$$

per cui

$$\cos oo' = \lambda \cos o_1 o'_1$$

$$\cos oo'_1 = -\lambda \cos o_1 o'.$$

*) Indicando con o e o_1 due raggi coniugati ortogonali dell'involuzione di una retta r (reale o immaginaria di 1ª specie), e con m e m_1 due altri raggi coniugati qualunque, si ha: $\operatorname{tg} om . \operatorname{tg} om_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} o_1 m . \operatorname{tg} o_1 m_1}$; per cui si può anche *definire* il raggio principale come *quello* o per cui è $|\operatorname{tg} om . \operatorname{tg} om_1| \angle 1$.

Sia ω' un altro raggio qualunque del fascio di r', e si ponga:

$$\varepsilon \equiv (o'\omega')(o'o), \quad \text{e} \quad \eta \equiv (o'_1\omega'_1)(o'_1 o_1).$$

Si ha:

$$\cos o\omega' = \cos oo' \cos o'\omega' + \text{sen}\, oo' \,\text{sen}\, o'\omega' \cos\varepsilon$$

e

$$\cos o_1\omega'_1 = \cos o_1 o'_1 \cos o'_1\omega'_1 + \text{sen}\, o_1 o'_1 \,\text{sen}\, o'_1\omega'_1 \cos\eta,$$

cioè, indicando con θ l'angolo $o'\omega'$,

$$\cos o\omega' = \cos oo' \cos\theta + \text{sen}\, oo' \,\text{sen}\,\theta \cos\varepsilon,$$

$$\cos o_1\omega'_1 = \cos o_1 o'_1 \cos\theta + \text{sen}\, o_1 o'_1 \,\text{sen}\,\theta \cos\eta.$$

Ma

$$\cos o_1 o' = -\,\text{sen}\, o_1 o'_1 \cos\eta$$

e

$$\cos oo'_1 = \text{sen}\, oo' \cos\varepsilon,$$

dunque:

$$\begin{aligned}\cos o\omega' &= \lambda \cos o_1 o'_1 \cos\theta + \cos oo'_1 \,\text{sen}\,\theta \\ &= \lambda \cos o_1 o'_1 \cos\theta - \lambda \cos o_1 o' \,\text{sen}\,\theta \\ &= \lambda(\cos o_1 o'_1 \cos\theta - \cos o_1 o' \,\text{sen}\,\theta) \\ &= \lambda(\cos o_1 o'_1 \cos\theta + \text{sen}\, o_1 o'_1 \cos\eta \,\text{sen}\,\theta),\end{aligned}$$

cioè

$$\cos o\omega' = \lambda \cos o_1\omega'_1.$$

Analogamente si dimostra:

$$\cos o\omega'_1 = -\lambda \cos o_1\omega'.$$

Dunque:

$$\cos o\omega' - \lambda \cos o_1\omega'_1 - i(\lambda \cos o_1\omega' + \cos o\omega'_1) = 0.$$

Concludiamo che se il numeratore della frazione assegnata per valore di $\cos rr'$, è nullo per una particolare scelta del raggio principale di r', sarà sempre nullo *qualunque* sia il raggio di r' che si vuole assumere come principale.

Ne segue che è $\cos rr' = \infty$ *indipendentemente* dalla scelta del raggio principale di r'; ovvero è $\cos rr' = \frac{0}{0}$ *indipendentemente* da questa medesima scelta. In quest'ultima ipotesi assumeremo, per definizione, $\cos rr' = 0$.

3. Date due rette una almeno delle quali sia immaginaria di seconda specie, chiameremo *angolo* di esse, l'angolo delle due rette (reali o immaginarie di prima specie) parallele alle date, e uscenti da un punto qualunque reale.

Con procedimento analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\cos r r' = 0$, è che i punti all'infinito di r e di r', sian reciproci rispetto alla polarità assoluta. Onde dicendo *perpendicolari* due rette r ed r' ogni qualvolta sia soddisfatta quest'ultima condizione, possiamo dire che la condizione di perpendicolarità di due rette r e r', è $\cos r r' = 0$.

4. Dimostriamo ora che l'espressione (1) assegnata per definizione come valore di $\cos r r'$, soddisfa alla seguente nòta relazione fondamentale dell'ordinaria geometria analitica:

$$\cos r r' . \operatorname{sen}^2 x y z = - \begin{vmatrix} 0 & \cos x r' & \cos y r' & \cos z r' \\ \cos x r & 1 & \cos x y & \cos x z \\ \cos y r & \cos y x & 1 & \cos y z \\ \cos z r & \cos z x & \cos z y & 1 \end{vmatrix} \quad (\equiv - D).$$

Infatti si ha:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\cos o'x - i\lambda' \cos o'_1 x}{[1-\lambda'^2]^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{\cos o'y - i\lambda' \cos o'_1 y}{[1-\lambda'^2]^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{\cos o'z - i\lambda' \cos o'_1 z}{[1-\lambda'^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{\cos o x - i\lambda \cos o_1 x}{[1-\lambda^2]^{\frac{1}{2}}} & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \dfrac{\cos o y - i\lambda \cos o_1 y}{[1-\lambda^2]^{\frac{1}{2}}} & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \dfrac{\cos o z - i\lambda \cos o_1 z}{[1-\lambda^2]^{\frac{1}{2}}} & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}$$

cioè:

$$D[(1-\lambda^2)(1-\lambda'^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos o'x & \cos o'y & \cos o'z \\ \cos ox & & & \\ \cos oy & & \operatorname{sen}^2 xyz & \\ \cos oz & & & \end{vmatrix} - i\lambda' \begin{vmatrix} 0 & \cos o'_1 x & \cos o'_1 y & \cos o'_1 z \\ \cos ox & & & \\ \cos oy & & \operatorname{sen}^2 xyz & \\ \cos oz & & & \end{vmatrix}$$

$$- i\lambda \begin{vmatrix} 0 & \cos o'x & \cos o'y & \cos o'z \\ \cos o_1 x & & & \\ \cos o_1 y & & \operatorname{sen}^2 xyz & \\ \cos o_1 z & & & \end{vmatrix} - \lambda\lambda' \begin{vmatrix} 0 & \cos o'_1 x & \cos o'_1 y & \cos o'_1 z \\ \cos o_1 x & & & \\ \cos o_1 y & & \operatorname{sen}^2 xyz & \\ \cos o_1 z & & & \end{vmatrix}$$

$$= - \operatorname{sen}^2 xyz (\cos o o' - i\lambda' \cos o o'_1 - i\lambda \cos o_1 o' - \lambda\lambda' \cos o_1 o'_1).$$

E quindi:

$$- D = \operatorname{sen}^2 x y z \frac{\cos o o' - i \lambda' \cos o o'_1 - i \lambda \cos o_1 o' - \lambda \lambda' \cos o_1 o'_1}{[(1 - \lambda^2)(1 - \lambda'^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

cioè

$$- D = \cos r r' . \operatorname{sen}^2 x y z. \qquad \text{C. V. D.}$$

Catania, ottobre 1904.

GIUSEPPE MARLETTA.

SUR QUELQUES APPLICATIONS INTÉGRALES D'UNE SÉRIE DE COEFFICIENTS BINOMIAUX.

Par M. **Niels Nielsen**, à Copenhague.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. S. PINCHERLE).

Adunanza dell'11 dicembre 1904.

. . . .

Supposons qu'une série de coefficients binomiaux $W(x)$ soit convergente pour les valeurs finies de x, dont les parties réelles sont positives; cette série se présentera sous la forme suivante

$$(1) \qquad W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \Delta^s W(1) . \binom{x-1}{s},$$

et il est évident que la série de puissances

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \Delta^s W(1) . x^s$$

est convergente à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Or, supposons que la fonction donnée $W(x)$ satisfasse encore à cette condition nouvelle

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{W(n)}{n^k} = 0,$$

où k désigne une quantité finie, indépendante de n; cette autre série de puissances

$$(4) \qquad g(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s W(s+1) . x^s$$

est également convergente à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Cela posé, nous avons d'après M. LINDELÖF *) l'identité

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{1-x} . g\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

*) Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXIV (1898), n° 7.

où, ce qui est la même chose,

$$(6) \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \cdot f\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

ce qui donnera cette proposition, cas particulier du théorème de M. LINDELÖF :

Supposons que la fonction donnée $W(x)$ satisfasse aux conditions (1) et (3), les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, qui ne sont définies originellement que si $|x| < 1$, peuvent être prolongées dans les demi-plans, définis par les inégalités $R(x) < \frac{1}{2}$, $R(x) > -\frac{1}{2}$ respectivement, où $R(x)$ désigne la partie réelle de x.

Dans le cas particulier, où $W(x)$ se présente sous cette forme intégrale

$$(7) \qquad W(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

nous aurons pour $f(x)$ et $g(x)$ ces deux expressions intégrales

$$(8) \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1 - x(1-t)} dt, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+xt} dt,$$

dont la première est applicable pourvu que x ne soit pas égal à une quantité positive telle que $x \geqq 1$, tandis que la seconde exige que x ne soit pas égal à une quantité négative telle que $x \leqq -1$. Dans ce cas particulier, les deux formules (5) et (6) sont des conséquences immédiates des intégrales (8), et le prolongement de $f(x)$ et $g(x)$ est évident.

Démontrons maintenant que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ nous permettent de déduire pour la fonction $W(x)$ des représentations remarquables. A cet effet, prenons comme point de départ ces trois formules très connues, où n désigne un entier non négatif:

$$(9) \qquad \frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi x} \cdot \binom{x-1}{n} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{n-x} dt, \qquad 0 < R(x) < n+1$$

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(-1)^n \pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{\sin \pi x} \cdot \dbinom{x-1}{n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{n-1} e^{(n+1)\varphi i} (\operatorname{tg} \varphi)^{x-1} d\varphi, \\ \qquad\qquad 0 < R(x) < n+1 \end{array} \right.$$

$$(11) \qquad \binom{x-1}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_A t^{-n-1} (1+t)^{x-1} dt, \qquad R(n) > 0;$$

dans (11) A désigne un chemin d'intégration fermé et fini qui passe par le point $t = -1$ et qui doit toujours entourer une seule fois le point $t = 0$.

Cela posé, le théorème général concernant l'intégration terme à terme d'une série infinie donnera immédiatement, en vertu de (9) et (10), ces deux représentations intégrales

$$(12)\quad \frac{\pi}{\sin \pi x}\cdot W(x) = \int_0^1 \frac{f(1-t)t^{x-1}}{(1-t)^x}\,dt, \qquad 0 < R(x) < 1$$

$$(13)\quad \frac{\pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{\sin \pi x}\cdot W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\varphi\, e^{i\varphi})\frac{e^{\varphi i}}{\cos\varphi}(\operatorname{tg}\varphi)^{x-1}\,d\varphi, \quad 0 < R(x) < 1,$$

d'où sans peine, en vertu de (11),

$$(14)\quad W(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_A f\left(-\frac{1}{t}\right)(1+t)^{x-1}\,dt, \qquad R(x) > 0;$$

c'est certainement à l'aide de (14) que vous avez trouvé votre condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par une fonction quelconque développable en série de coefficients binomiaux.

Revenons maintenant à la formule (12), puis mettons-y $1-t$ au lieu de t, nous obtenons immédiatement cette proposition remarquable:

Supposons que $f(x)$ satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$(15)\qquad F(1-x) = F(x);$$

il sera la même chose avec $W(x)$, et viceversa.

Posons encore dans (12)

$$\frac{t}{1-t} = z, \qquad t = \frac{t}{1+z};$$

nous aurons ces deux autres représentations intégrales

$$(16)\quad \frac{\pi}{\sin \pi x}\cdot W(x) = \int_0^\infty \frac{f\left(\frac{1}{1+t}\right)}{1+t}\cdot z^{x-1}\,dt, \qquad 0 < R(x) < 1,$$

$$(17)\quad \frac{\pi}{\sin \pi x}\cdot W(x) = \int_0^\infty \frac{1}{z}\cdot g\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{x-1}\,dz, \qquad 0 < R(x) < 1.$$

Quant à la formule (13), posons-y $\operatorname{tg}\varphi = t$, nous retrouvons une intégrale analogue à celle qui figure au second membre de (16) mais prise le long de l'axe des nombres imaginaires de $t=0$ à $t=+\infty i$; c'est-à-dire que la formule (13) est au fond identique avec (12); mais cette forme différente de (12) nous conduira à des intégrales nouvelles et assez interéssantes, nous le verrons bientôt.

Divisons encore en deux autres l'intégrale définie qui figure au

second membre de (16), en mettant

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

nous aurons la proposition suivante:

Posons pour abréger

$$(18)\quad V_1(x) = \int_0^1 g(t)t^{x-1}dt,\quad V_2(x) = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{1}{1+t}\right)}{1+t}.t^{x-1}dt,$$

nous aurons

$$(19)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi x}.W(x) - V_1(1-x) = V_2(x),$$

de sorte que la fonction figurant au premier membre de (19) *peut souvent être traitée entièrement comme* $W(x)$.

Considérons maintenant d'un autre point de vue la formule (16), savoir en appliquant la loi de réciprocité si remarquable de M. MELLIN *). A cet effet, posons

$$x = u + iv, \qquad 0 < u < 1,$$

où u et v désignent des quantités réelles, puis supposons que $W(x)$ satisfasse encore à cette condition nouvelle

$$(20)\qquad |W(u+iv)| = e^{-\delta|v|}.f(u, v),$$

où δ est une quantité réelle non négative et indépendante de u et v, tandis que $f(u, v)$ est une fonction positive des deux variables réelles u et v qui satisfait à cette condition

$$(21)\qquad \lim_{|v|=\infty} e^{-\epsilon|v|}.f(u, v) = 0,$$

où ϵ désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.

Cela posé, remarquons que $W(x)$ est une fonction holomorphe de x pourvu que x soit fini et $R(x) > 0$, je dis que la fonction figurant au premier membre de (16) est une fonction $F(x)$ de M. MELLIN. En effet, nous aurons sous les mêmes conditions qu'auparavant

$$\left|\frac{\pi}{\sin \pi x}\right| = e^{-\pi|v|}.f_1(u, v),$$

ce qui donnera, en vertu de (20),

$$\left|\frac{\pi W(x)}{\sin \pi x}\right| = e^{-(\pi+\delta)|v|}.f_2(u, v);$$

*) Acta Mathematica, t. XXV (1902), pp. 156-161.

c'est-à-dire que la loi de réciprocité de M. [illegible] donnera cette proposition remarquable :

Supposons que la série de [illegible] satisfait aux conditions (1), (3) *et* (20), [illegible] *représentation intégrale*

$$(22)\quad \frac{1}{1+z}\cdot f\left(\frac{1}{1+z}\right) = [illegible]$$

où $0 < a < 1$, *et où* [illegible]
exclues,

$$(23)\qquad -(\pi + \delta) < [illegible]$$

tandis que le chemin [illegible]
nombres purement imaginaires.

Il est évident que [illegible]
LIN nous permet de [illegible]
étant du même caractère que [illegible]
dans vos belles recherches sur les séries [illegible] *).

Quant à la portée de la formule (22), nous aurons cette proposition :

La formule (22) [illegible]
convergente pourvu que [illegible]

Considérons [illegible]
de fonctions très connues :

I^er^ EXEMPLE :

$$W(z) = [illegible]$$

Nous aurons ici

$$[illegible](x) = 1, \qquad [illegible](x) = \frac{[illegible]}{[illegible] - x},$$

ce qui donnera, en vertu de (22),

$$(24)\qquad \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{2i}\int [illegible]$$

où il faut admettre

$$(24^{bis})\qquad 0 < a < 1, \qquad -\pi < [illegible] < -\pi.$$

Posons pour abréger

$$(25)\qquad [illegible](x) = \int_0^{[illegible]} \frac{[illegible]}{1 - [illegible]}\,d[illegible] = \sum \frac{(-1)^{[illegible]}}{x + [illegible]}.$$

*) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, vol. IV, 1^e^ sem. 1888, pp. [illegible]

ou, ce qui revient au même,

$$\beta(x) = \left[\Psi\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right], \tag{25^{\text{bis}}}$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de GAUSS, savoir

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{x+s}\right), \tag{26}$$

tandis que C est la constante d'EULER; nous aurons, en vertu de (19), la formule bien connue

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \beta(x) + \beta(1-x). \tag{27}$$

II^e EXEMPLE :

$$W(x) = \frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1}\,dt, \qquad R(x) > 0,$$

ce qui donnera, en vertu de (4) et (5),

$$g(z) = \frac{1}{z}\log(1+z), \qquad f(z) = -\frac{1}{z}\log(1-z),$$

d'où, en vertu de (22),

$$\log\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{z^{-x}}{x\sin\pi x}\,dx, \tag{28}$$

où il faut admettre

$$0 < a < 1, \qquad -\pi < \theta < +\pi, \tag{28^{\text{bis}}}$$

tandis que la formule (13) donnera

$$\frac{\pi e^{\frac{\pi x i}{2}}}{x \sin \pi x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)i - \log \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}(\operatorname{tg}\varphi)^{x-1}\,d\varphi,$$

d'où, en mettant $\operatorname{tg}\varphi = z$, ces deux formules

$$\frac{\pi}{x \sin \frac{\pi x}{2}} = \int_0^\infty \log\left(1+\frac{1}{z^2}\right) z^{x-1}\,dz, \qquad 0 < R(x) < 2, \tag{29}$$

$$\frac{\pi}{2x\cos\frac{\pi x}{2}} = \int_0^\infty \operatorname{arc\,cot} z \,.\, z^{x-1}\,dz, \qquad 0 < R(x) < 1, \tag{29^{\text{bis}}}$$

où il faut prendre dans (29^{bis}) la valeur de $\operatorname{arc\,cot} z$ qui deviendra égale à zéro pour $z = \frac{\pi}{2}$.

Appliquons maintenant la formule (22); nous aurons:

$$(30)\qquad \log\left(1+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{z^{-x}}{x\sin\frac{\pi x}{2}}\,dx,$$

formule qui est valable pourvu que

$$(30^{\text{bis}})\qquad 0<a<2,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<+\frac{\pi}{2},$$

et

$$(31)\qquad \operatorname{arc}\cot z=\frac{1}{4i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{z^{-x}}{x\cos\frac{\pi x}{2}}\,dx,$$

où il faut admettre

$$(31^{\text{bis}})\qquad 0<a<1,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<+\frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas, la formule (19) donnera, en vertu de (27), cette autre

$$(32)\qquad \frac{\beta(x)+\log 2}{x}=\int_0^1\log\left(1+\frac{1}{t}\right)t^x\,dt,\qquad R(x)>0.$$

III^e Exemple:

$$W(x)=\log(x+1)=\int_0^1\frac{t_x-1}{\log t}\,dt,\qquad R(x)>-1.$$

Nous obtenons le développement en série de coefficients binomiaux en mettant

$$t^x=t.[1-(1-t)]^{x-1},$$

puis appliquant la formule binomiale et intégrant terme à terme; quant à la fonction $g(x)$, nous aurons ici

$$x\,g(x)=\lambda(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\lambda(x)=\sum_{s=2}^{s=\infty}(-1)^s\log s\,.\,x^{s-1},$$

de sorte que la formule (22) donnera ici cette formule intégrale

$$(33)\qquad \lambda\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\log(x+1)}{\sin\pi x}\,.\,z^{-x}\,dx,$$

où il faut admettre

$$(33^{\text{bis}})\qquad -1<a<+1,\quad -\pi<\theta<+\pi.$$

Il est bien connu *) que la fonction $\lambda(x)$ n'a dans toutes les parties finies du plan des x que le seul point singulier $x=-1$.

*) Hadamard, *La série de* Taylor, p. 63; Paris, 1901.

IV^e Exemple:

$$W(x) = \Psi(x) + C = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t} dt, \qquad R(x) > 0.$$

Appliquons ici la méthode indiquée dans l'exemple précédent, nous obtenons ce développement en série de coefficients binomiaux:

$$(34) \qquad \Psi(x) + C = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{1+s} \cdot \binom{x-1}{s}, \qquad R(x) > 0,$$

qui est dû à Stern *), ce qui donnera, en vertu de (1) et (5),

$$f(z) = \log(1 - z), \qquad g(z) = -\frac{1}{1+z} \cdot \log(1 + z),$$

d'où, en vertu de (12),

$$(35) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} [\Psi(x) + C] = \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \qquad 0 < R(x) < 1.$$

Appliquons maintenant la formule très connue

$$\Psi(1 - x) - \Psi(x) = \pi \cot \pi x,$$

nous aurons, en mettant dans (35) $1 - t$ au lieu de t, et $1 - x$ au lieu de x, cette formule analogue

$$(35^{\text{bis}}) \quad \frac{\pi^2 \cos \pi x}{\sin^2 \pi x} = \int_0^1 \frac{\log\left(\frac{1}{t} - 1\right)}{(1-t)^1} t^{x-1} dt, \qquad 0 < R(x) < 1.$$

La valeur limite

$$\lim_{|x|=\infty} [\Psi(x) - \log x] = 0,$$

où x ne doit pas être négatif réel, donnera maintenant, à l'aide de (22) et de (24), cette représentation intégrale

$$(36) \quad -\frac{1}{1+z}\left[C + \log\left(1 + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Psi(x)}{\sin \pi x} \cdot z^{-x} dz,$$

où il faut admettre $0 < a < 1$ et $-\pi < \theta < +\pi$; la formule (35^{bis}) donnera de même

$$(36^{\text{bis}}) \qquad \frac{\log\left(\frac{1}{z}\right)}{1+z} = \frac{\pi}{2i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\cos \pi x}{\sin^2 \pi x} \cdot z^{-x} dz.$$

Quant à la formule (13), nous aurons ici

---

*) *Zur Theorie der* Euler'*schen Integrale*, p. 39; Götting. Studien, 1847.

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi x}{2}}[\Psi(x)+C] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\cos\varphi + \varphi\cot\varphi)(\cot\varphi)^{x-1}\,d\varphi, \\ &\qquad\qquad o < R(x) < 2, \end{aligned} \right.$$

$$(37^{bis})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi x}{2}}[\Psi(x)+C] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cot\varphi\log\cos\varphi - \varphi)(\cot\varphi)^{x-1}\,d\varphi, \\ &\qquad\qquad o < R(x) < 1, \end{aligned} \right.$$

d'où, en posant $\cot\varphi = z$, deux nouvelles formules intégrales analogues à (36) et (36^{bis}) mais d'une forme plus compliquée.

Introduisons maintenant les deux fonctions qui correspondent à $V_1(x)$ et $V_2(x)$ figurant dans (18), posons

$$(38)\qquad \xi(x) = \int_0^1 \frac{\log(1+z)}{1+z}.z^{x-1}\,dz, \qquad R(x) > o;$$

nous aurons ici

$$(39)\qquad \beta^{(1)}(x) - \xi(x) - \xi(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}[\Psi(x)+C],$$

où $\beta^{(1)}(x)$ désigne la dérivée de la fonction $\beta(x)$ introduite dans (25).

Quant à la fonction $\xi(x)$, une intégration par parties donnera

$$\int_0^1 \log(z+1).z^{x-1}\,dz = \frac{\log 2 - \beta(x+1)}{x},$$

d'où

$$(40)\qquad \xi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s+x}[\log 2 - \beta(x+s+1)];$$

posons pour abréger

$$\lambda(s) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s},$$

nous aurons de plus, en vertu de (38),

$$(41)\qquad \xi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}\lambda(s)}{x+s}$$

$$(41^{bis})\quad \xi(x) = \beta(x)\log 2 - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\,\lambda(S)}{x(x+1)\ldots(x+s)}\cdot\frac{1}{2^{s+1}},$$

où la série de factorielles figurant au second membre de (41^{bis}) est convergente pour une valeur finie quelconque de x, les pôles simples de $\xi(x)$ exclus.

V[e] Exemple :

$$W(x)=\beta(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt,\qquad R(x)>0.$$

Les formules (8) et (5) donnent ici

$$g(x)=\frac{\log\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1-x},\qquad f(x)=\frac{\log(2-2x)}{1-2x},$$

d'où, en vertu de (12),

$$(42)\qquad \frac{\pi\beta(x)}{\sin\pi x}=\int_0^1\frac{\log(2t)}{2t-1}\cdot\frac{t^{x-1}}{(1-t)^x}dt,\qquad 0<R(x)<1,$$

de sorte que (22) donnera ici

$$(43)\qquad \frac{\log\left(\frac{2z}{1+z}\right)}{z-1}=\frac{1}{2i}\cdot\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\beta(x)}{\sin\pi x}\cdot z^{-x}dx,$$

où il faut admettre $0<a<1$, $-\pi<\theta<+\pi$.

Appliquons ensuite l'identité

$$\beta(x)+\beta(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

nous aurons de plus

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)^2=\int_0^1\frac{\log\frac{t}{1-t}}{2t-1}\cdot\frac{t^{x-1}}{(1-t)^x}dt=\int_0^\infty\frac{\log z}{z-1}\cdot z^{x-1}dz,$$

ce qui donnera cette formule analogue à (43)

$$(43^{\text{bis}})\qquad \frac{\log z}{z-1}=\frac{\pi}{2i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{z^{-x}}{\sin^2\pi x}dx,\qquad 0<a<1.$$

Nous ne nous arrêtons pas à l'application de la formule (13), parce que les fonctions $V_1(x)$ et $V_2(x)$ introduites dans (18) nous conduiront à des résultats beaucoup plus intéressants. Posons en effet

$$(44)\qquad \eta(x)=\int_0^1\frac{\log 2-\log(1+t)}{1-t}t^{x-1}dt;$$

nous trouvons cette formule analogue à (39)

$$(45)\qquad \frac{\pi\beta(x)}{\sin\pi x}=\Psi^{(1)}(x)-\eta(x)+\eta(1-x).$$

Quant à la fonction $\eta(x)$, nous aurons, en vertu de (44),

$$(46)\qquad \eta(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\log 2-\lambda_1(s)}{x+s}$$

$$(46^{\text{bis}})\qquad \eta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\dots(x+s)} \cdot \frac{1}{(s+1)\,2^{s+1}},$$

où nous avons posé dans (46)

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{s-1}}{s};$$

nous aurons encore sans peine

$$(47)\qquad \eta(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\beta(x+s+1)}{x+s} = \Delta^{-1}\left[\frac{1}{x}\beta(x+1)\right].$$

. . . .

Voyez mes réflexions sur les applications intégrales d'une série de coefficients binomiaux. Je laisse maintenant à votre autorité de décider si de telles réflexions ont de la valeur pour les séries susdites qui nous intéressent, et pour le type d'intégrales définies que vous avez introduites le premier dans vos intéressantes recherches sur les fonctions hypergéométriques généralisées.

Copenhague, le 4 décembre 1904.

NIELS NIELSEN.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA PHYSIQUE.

Par M. S. **Zaremba**, à Cracovie.

Adunanza del 27 novembre 1904.

1. Considérons dans un espace à n dimensions un domaine déterminé (D), ne s'étendant pas à l'infini, ainsi qu'une fonction donnée $G(x_1, \ldots x_n; \xi_1, \ldots \xi_n)$ des deux systèmes de variables $x_1, \ldots x_n$ et $\xi_1, \ldots \xi_n$, définie pour tous les systèmes de positions distinctes des points $(x_1, \ldots x_n)$ et $(\xi_1, \ldots \xi_n)$, dans le domaine (D) ou sur sa frontière. On peut se proposer de déterminer deux fonctions $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ et $\psi(x_1, \ldots x_n)$ vérifiant, dans tout le domaine (D), les équations fonctionnelles suivantes:

$$(1) \quad f(x_1, \ldots x_n) = \int_{(D)} \cdots \int G(x_1, \ldots x_n; \xi_1, \ldots \xi_n) \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

et

$$(2) \quad F(x_1, \ldots x_n) = \psi(x_1, \ldots x_n) - \lambda \int_{(D)} \cdots \int G(x_1, \ldots x_n; \xi_1, \ldots \xi_n) \psi(\xi_1, \ldots \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

où $f(x_1, \ldots x_n)$ et $F(x_1, \ldots x_n)$ représentent des fonctions données, la lettre λ désignant un paramètre variable.

M. Fredholm *) le premier a mis en évidence, par sa remarquable solution de l'équation (2), les propriétés générales de cette équation dans le cas où l'on n'assujettit la fonction G qu'à des restrictions d'une nature très générale.

Les travaux de M. Fredholm ont été le point de départ de ceux

*) Ivar Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du Problème de* Dirichlet (Översigt of Köngl. Vatenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1900, Stockholm); *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Acta Mathematica, t. XXVII).

de M. HILBERT *), de M. PLEMELJ **) et de quelques autres mathématiciens, sur la théorie des équations (1) et (2) ou sur les applications de cette théorie. M. HILBERT, en développant d'une façon systématique, dans un brillant exposé, les applications variées de l'équation (2), a mis en lumière toute la portée de la théorie de M. FREDHOLM. M. HILBERT, en adoptant, en principe, la belle méthode de M. STEKLOFF ***), a étendu à de nouvelles séries les résultats obtenus précédemment par ****) M. STEKLOFF, M. KORN, M. KNESER et moi-même dans des recherches sur certaines séries analogues à la série de FOURIER et dont la théorie a été fondée par les travaux celèbres de M. POINCARÉ. C'est à M. HILBERT aussi que l'on doit la remarque suivante: lorsque la fonction $G(x_1, \ldots x_n;\ \xi_1, \ldots \xi_n)$ représente la fonction de GREEN ordinaire relative au domaine (D), ou une des généralisations de cette fonction introduite dans ces derniers temps en analyse, lorsqu'en outre la fonction $f(x_1, \ldots x_n)$ possède des dérivées secondes continues et lorsqu'elle satisfait à des conditions aux limites appropriées, la fonction $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ est égale à une certaine combinaison linéaire de la fonction f et de ses dérivées jusqu'au second ordre inclusivement. Cette remarque est en réalité la réciproque (immédiate d'ailleurs) du théorème que, dans le cas de la fonction de GREEN ordinaire, on peut énoncer de la façon suivante: la fonction u s'annulant sur la frontière du domaine (D) et vérifiant à l'intérieur de ce domaine l'équation aux dérivées partielles

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \varphi(x_1, \ldots x_n) = 0$$

peut être représentée par la formule suivante:

$$(4)\quad u = \mu \int_{(D)} \cdots \int \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)\, G(x_1, \ldots x_n,\ \xi_1, \ldots \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

*) DAVID HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, erste und zweite Mittheilung* (Göttinger Nachrichten, 1904, Hefte 1 und 3).

**) PLEMELJ, *Ueber die Anwendung der* FREDHOLM*'schen Funktionalgleichungen in der Potentialtheorie* (Sitzungsberichte, Wien 1903); *Zur theorie der* FREDHOLM*'schen Funktionalgleichung*; *Ueber lineare Rendwertanfgaben der Potentialtheorie* (Monatshefte für Mathematik und Physik, XV. Jahrg., p. 93 u. p. 337).

***) STEKLOFF, *Mémoire sur les fonctions harmoniques de* M. H. POINCARÉ (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. II).

****) Consulter les mémoires cités par M. HILBERT dans le travail cité plus haut.

en désignant par μ un facteur numérique (égal à $\frac{1}{2\pi}$ pour $n = 2$ et à $\frac{1}{4\pi}$ pour $n = 3$) et en supposant que la fonction φ vérifie les conditions voulues pour que la fonction représentée par la formule (4) admette des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclusivement.

Pour que la solution de l'équation (1) donnée par M. HILBERT soit applicable, il faut:

1) Que la fonction $f(x_1, \ldots x_n)$ satisfasse à certaines conditions aux limites.

2) Que cette fonction admette des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclusivement.

La première de ces restrictions est manifestement une condition de possibilité du problème, du moins dans le cas où la fonction $\varphi(x_1, \ldots x_n)$, doit être finie, il est donc impossible de s'en débarrasser. Il n'en est au contraire pas de même de la seconde. Je me propose, et ce sera l'objet principal de ce travail, d'établir le théorème suivant:

Lorsque la fonction G représente la fonction de GREEN ordinaire relative au domaine (D), ou l'une des fonctions de GREEN généralisées considérées par M. HILBERT et lorsque la fonction f vérifie la première des deux conditions qui viennent d'être énoncées, il est nécessaire et suffisant, pour qu'il existe une fonction continue φ vérifiant l'équation (1), que l'expression

$$\Delta(f, h) = \frac{\sum_{k=1}^{n}[f(x_1, \ldots x_k + h, \ldots x_n) + f(x_1, \ldots x_k - h, \ldots x_n)] - 2nf(x_1, \ldots x_n)}{h^2}$$

ait pour limite, lorsque h tend vers zéro, une fonction $f_1(x_1, \ldots x_n)$, continue dans le domaine (D); lorsque cette condition est vérifiée, on obtiendra la fonction demandée $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ en remplaçant dans la formule de M. HILBERT *) l'expression:

$$\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

par la fonction $f_1(x_1, \ldots x_n)$.

Rien d'essentiel ne distingue les uns des autres les cas qui corres-

*) Loc. cit., pag. 238.

pondent aux différentes valeurs du nombre de dimensions n de l'espace considéré *). Nous prendrons $n = 3$ et nous établirons dans les n[os] suivants une série de propositions d'où il sera aisé de déduire le théorème que nous venons d'énoncer.

2. Désignons par x, y, z et x', y', z' les coordonnées rectangulaires de deux points dans l'espace, par r leur distance, par $\varphi(x, y, z)$ une fonction continue dans tout le domaine (D) et par $d\tau'$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z'). Posons ensuite

$$\Phi(x, y, z) = \int_{(D)} \varphi(x', y', z') \frac{d\tau'}{r},$$

où, comme l'indique l'indice (D), l'intégration doit être étendue à tout le domaine (D). Je dis que l'on aura

$$\lim_{h=0} \Delta(\Phi, h) = -4\pi\varphi(x, y, z), \tag{6}$$

quelle que soit la position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D).

J'observe tout d'abord que l'on a

$$\Delta(\Phi, h) = \Delta(\Phi, -h)$$

quel que soit h; on peut donc, sans nuire à la généralité de la démonstration, admettre que

$$h > 0.$$

Cela posé, envisageons, en même temps que les points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, les points $A(x+h, y, z)$, $B(x, y+h, z)$ et $C(x, y, z+h)$, ainsi que leurs symétriques A', B' et C' par rapport au point M; nous aurons:

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) \\ &= \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{AM'} + \frac{1}{BM'} + \frac{1}{CM'} + \frac{1}{A'M'} + \frac{1}{B'M'} + \frac{1}{C'M'} - \frac{6}{r}\right] \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et

$$\Delta(\Phi, h) = \int_{(D)} \varphi(x', y', z') \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) d\tau'. \tag{8}$$

Soient α, β et γ les cosinus directeurs du vecteur MM' et $P_n(u)$ le

*) Je fais abstraction du cas $n = 1$ où mon théorème ne présenterait aucun intérêt.

polynôme de LEGENDRE de degré n en u. La formule (7) nous donnera:

(9) $$\Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) = 2\sum_{m=1}^{\infty}[P_{2m}(\alpha) + P_{2m}(\beta) + P_{2m}(\gamma)]\frac{h^{2m-2}}{r^{2m+1}}$$

lorsque

$$r > h;$$

et

(10) $$\Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) = \frac{6}{h^2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}[P_{2m}(\alpha)+P_{2m}(\beta)+P_{2m}(\gamma)]\frac{r^{2m}}{h^{2m+3}}$$

lorsque

$$r < h.$$

Désignons par ε un nombre positif non nul dont nous nous réservons de disposer plus tard.

La fonction $\varphi(x, y, z)$ étant continue, on pourra faire correspondre au nombre ε, si petit qu'il soit, un nombre positif ρ, différent de zéro, tel que l'inégalité

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \leqq \rho^2$$

entraîne l'inégalité

(11) $$|\varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z')| < \varepsilon.$$

Décrivons du point $M(x, y, z)$ comme centre une sphère (Σ) de rayon ρ et supposons que l'on ait pris ρ assez petit pour que cette sphère soit située toute entière à l'intérieur du domaine (D). La sphère (Σ) décomposera le domaine (D) en deux autres (D_1) et (D_2) dont l'une, soit (D_1), sera intérieur à cette sphère. Désignons par $I_1(h)$ et $I_2(h)$ les deux parties de l'intégrale (8) qui correspondent aux domaines (D_1) et (D_2).

Nous aurons

(12) $$\Delta(\Phi, h) = I_1(h) + I_2(h).$$

D'ailleurs

(13) $$\lim_{h=0} I_2(h) = \int_{(D_2)} \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\varphi(x', y', z')d\tau' = 0.$$

Posons

$$A(h) = \int_{(D_1)} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right)\varphi(x, y, z)d\tau' = \varphi(x, y, z)\int_{(D_1)} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right)d\tau'$$

et

$$B(h) = \int_{(D_1)} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right)[\varphi(x', y', z') - \varphi(x, y, z)]d\tau';$$

nous aurons

(14) $$I_1(h) = A(h) + B(h).$$

Supposons, comme nous en avons le droit, que

(15) $$h < \rho.$$

On s'assurera au moyen d'un calcul facile que

(16) $$A(h) = -4\pi\varphi(x, y, z).$$

Cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de $B(h)$ et désignons à cet effet par δ une longueur inférieure à chacune des longueurs h et $\rho - h$. Cela posé, envisageons deux sphères (Σ_1) et (Σ_2), de rayons $h - \delta$ et $h + \delta$, concentriques à la sphère (Σ). Ces sphères décomposeront le domaine (D_1) en trois parties dont l'une sera limitée par la sphère (Σ_1), la seconde par les sphères (Σ_1) et (Σ_2) et la troisième par les sphères (Σ_2) et (Σ). Soient $\psi_1(h)$, $\psi_2(h)$ et $\psi_3(h)$ les parties correspondantes de l'intégrale $B(h)$; nous aurons

(17) $$B(h) = \psi_1(h) + \psi_2(h) + \psi_3(h).$$

Considérons le point d'intersection M'' du rayon MM' avec la sphère (Σ'), de rayon un, concentrique aux sphères (Σ_1), (Σ_2) et (Σ) et désignons par $d\sigma'$ l'élément de surface de la sphère (Σ') relatif au point M''. L'inégalité (11) étant vérifiée pour toutes les positions du point $M'(x', y', z')$ à l'intérieur de la sphère (Σ), les formules (9) et (10) donneront:

$$|\psi_3| < 2\varepsilon \sum_{m=2}^{\infty} h^{2m-2} \int_{h+\delta}^{\rho} \frac{dr}{r^{2m-1}} \int_{(\Sigma')} \{|P_{2m}(\alpha)| + |P_{2m}(\beta)| + |P_{2m}(\gamma)|\} d\sigma'$$

et

$$|\psi_1| < \frac{6\varepsilon}{h^2} \int_0^{h-\delta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h}\right) r^2 dr \int_{(\Sigma')} d\sigma'$$
$$+ 2\varepsilon \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{h^{2m+3}} \int_0^{h-\delta} r^{2m+2} dr \int \{|P_{2m}(\alpha)| + |P_{2m}(\beta)| + |P_{2m}(\gamma)|\} d\sigma'.$$

Une inégalité bien connue, due à M. Schwarz, nous donne:

$$\left\{\int_{(\Sigma')} |P_{2m}(\alpha)| \, d\sigma'\right\}^2 < \int_{(\Sigma')} \{P_{2m}(\alpha)\}^2 d\sigma' \int_{(\Sigma')} d\sigma',$$

d'où

$$\int_{(\Sigma')} |P_{2m}(\alpha)| \, d\sigma' < \frac{4\pi}{\sqrt{4m+1}} < \frac{4\pi}{\sqrt{2m-2}}.$$

On peut évidemment remplacer, dans cette inégalité, la fonction $P_{2m}(\alpha)$ par chacune des fonctions $P_{2m}(\beta)$ et $P_{2m}(\gamma)$. D'ailleurs:

$$\int_{h+\delta}^{\rho} \frac{dr}{r^{2m-1}} < \frac{1}{(2m-2)h^{2m-2}},$$

$$\int_0^{b-\delta} r^{2m+2}\,dr < \frac{b^{2m+3}}{2m+3} < \frac{b^{2m+3}}{2m-2},$$

$$\int_0^{b-\delta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)r^2\,dr < \frac{b^2}{6}.$$

On aura donc

$$(18) \qquad |\psi_1| + |\psi_3| < N.\varepsilon,$$

en désignant par N un facteur *purement numérique* déterminé au moyen de l'équation suivante :

$$N = 4\pi\left(1 + 6\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(2m-2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Je fais maintenant les remarques suivantes :

1) L'inégalité (18) a lieu, quelque petite que soit la valeur attribuée à δ.

2) Il est évident que l'on a :

$$\lim_{\delta=0}\psi_2 = 0.$$

Il résulte de là que l'inégalité (18) et l'équation (17) entrainent l'inégalité suivante :

$$|B(b)| < N\varepsilon,$$

d'où l'on conclura, en tenant compte des relations (14) et (16), l'inégalité suivante :

$$|I_1(b) + 4\pi\varphi(x, y, z)| < N\varepsilon,$$

inégalité qui, faisons-le remarquer, a lieu sous la seule condition que l'inégalité (15) soit vérifiée. Le nombre ε pouvant être pris aussi petit que l'on voudra, on pourra, puisque N représente un facteur purement numérique, choisir ε de façon à avoir

$$N\varepsilon = v,$$

en désignant par v un nombre positif différent de zéro mais d'ailleurs aussi petit que l'on voudra. Nous avons donc :

$$\lim_{b=0} I_1(b) = -4\pi\varphi(x, y, z).$$

En s'appuyant sur cette équation, on déduira immédiatement des équations (12) et (13) la relation (6), relation qu'il s'agissait précisément de démontrer.

3. Pour aller plus loin, considérons une fonction continue $u(x, y, z)$ vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D) l'équation suivante :

$$(19) \qquad \lim_{b=0}\Delta(u, b) = 0.$$

Je dis que la fonction u possédera des dérivées de tous les ordres continues à l'intérieur du domaine (D) et qu'elle satisfaira, dans toute l'étendue de ce domaine, à l'équation de LAPLACE :

$$\Delta(u) = 0. \tag{20}$$

Ce théorème n'est que l'extension à plusieurs variables du théorème bien connu de M. SCHWARZ sur lequel repose la démonstration de M. CANTOR d'un théorème fondamental dans la théorie des séries trigonométriques *).

Pour établir le théorème que nous venons d'énoncer, désignons par v la fonction vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D) l'équation

$$\Delta(v) = 0$$

et prenant sur la frontière de ce domaine des valeurs égales à celles de la fonction u. Soit en outre w la fonction vérifiant dans le domaine (D) l'équation

$$\Delta(w) = 1$$

et se réduisant à zéro à la frontière de ce domaine. Désignons enfin par η un nombre égal à $+1$ ou à -1 et par t une indéterminée réelle. Cela posé, considérons la fonction :

$$\psi(x, y, z) = \eta(u - v) + t^2 w.$$

Nous aurons :

$$\lim_{h=0} \Delta(\psi, h) = t^2.$$

Cette équation prouve que la fonction ψ ne peut avoir de maximum en aucun point situé à l'intérieur du domaine (D). Il en résulte que la fonction ψ est négative ou nulle dans le domaine D. En effet, si elle pouvait devenir positive dans ce domaine, elle aurait un maximum puisqu'elle s'annule sur la frontière et qu'elle est continue. Ceci devant avoir lieu quelque petit que soit t et quelque soit le signe de η, la différence $u - v$ doit être nulle identiquement.

On a donc :

$$u = v$$

et le théorème est démontré.

4. Voici une conséquence importante des propositions établies dans les n^{os} précédents : lorsque pour une certaine fonction u,

$$\lim_{h=0} \Delta(u, h) = f(x, y, z),$$

*) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 1re éd., p. 2.

où f représente une fonction continue, est vérifiée dans toute l'étendue du domaine (D), la fonction u admet des dérivées premières continues en chaque point situé à l'intérieur de ce domaine. En effet, posons

$$(21) \qquad \psi(x, y, z) = u + \frac{1}{4\pi}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{d\tau'}{r},$$

où l'on a désigné par r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') et par $d\tau'$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z'). D'après le théorème du n° 2 on aura

$$\lim_{h=0} \Delta(\psi, h) = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D).

Donc, en vertu du théorème du n° précédent, la fonction ψ possédera, à l'intérieur du domaine (D), des dérivées de tous les ordres et satisfaira à l'équation

$$\Delta(\psi) = 0.$$

Il s'ensuit, à cause de l'équation (21), que la fonction u possédera bien des dérivées premières continues.

Il ne sera pas inutile de faire la remarque suivante : si l'on désigne par $(u_1)_A$ la valeur d'une dérivée première de la fonction u en un point A situé à l'intérieur du domaine (D) et par $(u_1)_B$ la valeur de la même dérivée en un autre point de ce domaine, on aura :

$$|(u_1)_B - (u_1)_A| < M\sqrt{\overline{AB}}$$

en désignant par M un nombre positif fini, indépendant des coordonnées du point B mais pouvant dépendre de la plus courte distance du point A à la frontière du domaine (D).

5. Désignons par a, b, c et p trois fonctions données des variables x, y, z possédant des dérivées premières continues dans toute l'étendue du domaine (D) et même sur la frontière de ce domaine et supposons qu'une fonction $u(x, y, z)$ jouisse des propriétés suivantes :

1) L'expression

$$(22) \qquad \lim_{h=0} \Delta(u, h) = f(x, y, z)$$

représente une fonction continue dans toute l'étendue du domaine (D).

2) On a

$$(23) \qquad \lim_{h=0} \Delta(u, h) + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + pu = 0.$$

Je dis que la fonction u possédera des dérivées secondes continues à l'intérieur du domaine (D) et qu'elle satisfaira à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta(u) + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + pu = 0. \tag{24}$$

En effet, d'après ce que l'on a vu au n° précédent, nous aurons:

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int_{(D)} f(x', y', z')\frac{d\tau'}{r'} + \psi(x, y, z) \tag{25}$$

en donnant aux symboles r' et $d\tau'$ le même sens que plus haut et en désignant par ψ une intégrale de l'équation

$$\Delta(\psi) = 0.$$

D'ailleurs la comparaison des équations (22) et (23) nous donne

$$f(x, y, z) = -a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - c\frac{\partial u}{\partial z} - pu.$$

Il s'ensuit, en tenant compte de la remarque faite à la fin du n° précédent, que l'on aura :

$$|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < M\sqrt[4]{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point situé à l'intérieur du domaine (D) et par M un nombre positif jouissant des mêmes propriétés que le nombre représenté par cette lettre au n° précédent. Donc, en vertu de la formule (25), la fonction u possédera des dérivées secondes continues à l'intérieur du domaine (D). Dès lors on aura:

$$\lim_{h=0} \Delta(u, h) = \Delta u.$$

Cela prouve que la fonction u satisfaira bien à l'équation (24).

En s'appuyant sur ce théorème ainsi que sur les propositions établies dans les n^{os} précédents, on établira, avec un peu d'attention, le théorème énoncé à la fin du n° 1.

6. Sans insister sur les applications de ce théorème, je voudrais seulement faire remarquer qu'il permet d'étendre les conditions de validité des développements en séries dont j'ai parlé au n° 1 de ce travail. En effet pour établir la légitimité d'un de ces développements pour une fonction donnée $f(x, y, z)$, on peut, en s'appuyant sur mon théorème, se dispenser d'admettre, comme on l'a fait jusqu'à présent, que la quantité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

existe; il suffit de supposer, sans rien changer aux autres hypothèses su lesquelles reposent les démonstrations des auteurs cités au n° 1, qu l'expression

$$\lim_{h=0} \Delta(f, h)$$

représente une fonction continue. Cette hypothèse, rappelons-le, entraîn l'existence des dérivées premières de la fonction $f(x, y, z)$, mais *null ment* celle des dérivées secondes à moins que la fonction f ne dépend que d'une seule variable.

Cracovie, le 17 Novembre 1904.

S. ZAREMBA.

LE FORMULE DEL SAINT-VENANT PER LE DEFORMAZIONI FINITE.

Nota di **R. Marcolongo**, in Messina.

Adunanza dell'11 dicembre 1904.

1. La deformazione finita d'un mezzo continuo è pienamente individuata dalle sei componenti di deformazione, considerate da CAUCHY *).

Se u, v, w rappresentano le componenti ortogonali dello spostamento di un punto x, y, z e si pone

$$(1) \qquad a_{11} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad a_{13} = \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ ecc.}$$

le componenti ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 di deformazione sono espresse dalle:

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 + 2\varepsilon_1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 + 2\varepsilon_2 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 + 2\varepsilon_3 \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} = \gamma_1 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = \gamma_2 \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} = \gamma_3 . \end{cases}$$

Nello studio della deformazione ha una speciale importanza la cosidetta *funzione caratteristica* φ, definita dalla

$$(4) \qquad \begin{cases} 2\varphi(x, y, z) = (1 + 2\varepsilon_1)x^2 + (1 + 2\varepsilon_2)y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)z^2 \\ \qquad\qquad + 2\gamma_1 yz + 2\gamma_2 zx + 2\gamma_3 xy . \end{cases}$$

Infatti, mediante φ si può agevolmente esprimere il coefficiente di dilatazione lineare di una retta, in una deformazione omogenea; e me-

*) Vedi la mia: *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, Milano, 1904; pag. 101.

diante la forma polare di φ si può esprimere lo scorrimento mutuo di due rette; infine la $\varphi = \text{cost.}$ rappresenta un ellissoide che si trasforma in una sfera *).

Per ciò che dovremo dire in seguito giova considerare la forma reciproca di φ; però se Δ è il discriminante di φ, cioè

$$(5) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

e accenniamo con Δ_{rs} il rapporto tra gli elementi aggiunti di Δ e lo stesso Δ, la forma reciproca Φ di φ resta definita da

$$(6) \qquad \begin{cases} 2\Phi(x, y, z) = \Delta_{11} x^2 + \Delta_{22} y^2 + \Delta_{33} z^2 + 2\Delta_{23} yz \\ \qquad + 2\Delta_{31} zx + 2\Delta_{12} xy. \end{cases}$$

2. Vogliasi ora vedere se date le sei componenti di deformazione se resta determinata la corrispondente deformazione. Un tal problema è identico con quello della integrabilità dei sistemi (2) e (3) di sei equazioni differenziali di primo ordine cui soddisfano le tre funzioni incognite u, v, w, supponendo date le ε_i e γ_i.

Supponiamo che questi sistemi definiscano effettivamente u, v, w. Posto per compendio

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}, \text{ ecc.},$$

direttamente, o partendo da una relazione generale facile a stabilirsi **), si ottengono i seguenti sistemi:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{11} = a_{11} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{21} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{31} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \gamma_{31} - \varepsilon_{12} = a_{12} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{32} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \gamma_{21} - \varepsilon_{13} = a_{13} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{23} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{33} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \end{cases}$$

ed altri due, che accenneremo rispettivamente con (8) e (9), e che si deducono da questo con permutazioni circolari delle lettere e degli indici. Inoltre

*) Vedi la mia Nota: *Les composantes de déformation d'un milieu continu* [J. de Sciencias math. e astron., XIII, 1899].

**) Vedi la Nota citata.

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2}(-\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}) &= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+a_{21}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+a_{31}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\\ \varepsilon_{23} &= a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+a_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+a_{32}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\\ \varepsilon_{32} &= a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+a_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z},\end{aligned}\right.$$

ed altri due che, come al solito, si deducono da questo e che accenneremo con (11) e (12).

Derivando il sistema (9) rispetto ad y, otterremo

$$\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x\partial y}-\sum_{u,v,w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}+a_{12}\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial z^2}+a_{13}\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y^2}-\sum\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a_{12}\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}+\cdots$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y\partial z}-\sum\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=a_{13}\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}+\cdots.$$

Derivando invece il sistema (10) rispetto z, ed ammettendo la invertibilità dell'ordine delle derivazioni, otterremo un altro sistema che ha i secondi membri eguali a quelli del sistema precedente; onde deve essere

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial y\partial z}=\sum\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\\ &\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_3}{\partial z}\right)=\sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).\end{aligned}\right.$$

Operando in modo analogo per le $\dfrac{\partial^3(u,v,w)}{\partial z\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3(u,v,w)}{\partial x\partial y^2}$, otterremo altre quattro relazioni che si deducono dalle precedenti con permutazioni circolari. E così ancora si vedrebbe agevolmente che la stessa operazione eseguita per le altre derivate

$$\frac{\partial^3(u,v,w)}{\partial y^2\partial z},\quad\frac{\partial^3(u,v,w)}{\partial z^2\partial x},\quad\frac{\partial^3(u,v,w)}{\partial x^2\partial y},\quad\frac{\partial^3(u,v,w)}{\partial x\partial y\partial z},$$

non conduce a relazioni diverse dalle sei già determinate.

D'altra parte, come ora vedremo subito, i secondi membri delle (13) si esprimono agevolmente mediante le ε_i, γ_i e le loro derivate. Abbiamo dunque ottenute *sei* relazioni *necessarie* per la esistenza delle u, v, w e che chiamansi appunto del Saint-Venant.

Se infatti indichiamo con A il determinante delle a_{rs}; e con A_{rs} l'elemento aggiunto di a_{rs}; la risoluzione dei sistemi (7), ... (12) rispetto

alle derivate seconde delle u, v, w, conduce ad equazioni della forma:

$$(14) \qquad \begin{cases} A\alpha_1 = A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_{13}\gamma, \\ A\beta_1 = A_{21}\alpha + A_{22}\beta + A_{23}\gamma, \\ A\gamma_1 = A_{31}\alpha + A_{32}\beta + A_{33}\gamma; \end{cases}$$

così, p. es., se $\alpha_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\beta_1 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\gamma_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, è pure

$$\alpha = \varepsilon_{11}, \qquad \beta = \gamma_{31} - \varepsilon_{12}, \qquad \gamma = \gamma_{21} - \varepsilon_{13}; \text{ ecc.};$$

e se

$$\alpha_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \qquad \beta_1 = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \qquad \gamma_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z},$$

sarà

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}), \qquad \beta = \varepsilon_{23}, \qquad \gamma = \varepsilon_{32}; \text{ ecc.}$$

Se ora diciamo α', β', γ' ed α'_1, β'_1, γ'_1 altre due terne di valori soddisfacenti alle (14), si ottiene agevolmente

$$\alpha_1\alpha'_1 + \beta_1\beta'_1 + \gamma_1\gamma'_1$$
$$= \alpha\alpha'\Delta_{11} + \beta\beta'\Delta_{22} + \gamma\gamma'\Delta_{33} + (\beta\gamma' + \beta'\gamma)\Delta_{23} + \cdots$$

cioè, per la (6),

$$\sum \alpha_1\alpha'_1 = \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha'} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta'} + \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma'} = \sum \alpha'\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha},$$

oppure

$$\sum \alpha_1\alpha'_1 = \Phi\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix},$$

dove con la notazione del secondo membro si accenna, in modo breve, la forma polare di Φ. Basta, a verificar tutto ciò, ricordare le note relazioni

$$A^2 = \Delta,$$
$$A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 = \Delta . \Delta_{11}, \text{ ecc.};$$
$$A_{12}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33} = \Delta . \Delta_{23}, \text{ ecc.};$$

relative al prodotto di due matrici.

Questa semplice osservazione permette di effettuare agevolmente il calcolo dei secondi membri delle (13). Otteniamo quindi le relazioni accennate nella forma semplice seguente

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2\gamma_1}{\partial y\partial z} = 2\Phi\left[\tfrac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}), \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}\right] \\ \qquad\qquad - \Phi\begin{bmatrix}\gamma_{32} - \varepsilon_{21}, & \varepsilon_{22}, & \gamma_{12} - \varepsilon_{23} \\ \gamma_{23} - \varepsilon_{31}, & \gamma_{13} - \gamma_{32}, & \varepsilon_{33}\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z}\right) \\
&\quad = \Phi\begin{bmatrix} \varepsilon_{13}, & \frac{1}{2}(\gamma_{11} - \gamma_{22} + \gamma_{33}), & \varepsilon_{31}, \\ \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{21}, & \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{22} - \gamma_{33}) \end{bmatrix} \\
&- \Phi\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}), & \varepsilon_{23}, & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{11}, & \gamma_{31} - \varepsilon_{12}, & \gamma_{21} - \varepsilon_{13} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

ed altre quattro che si deducono con permutazioni circolari.

3. Si deducono di qui le notissime formule, stabilite la prima volta dal SAINT-VENANT, pel caso della deformazione infinitesima. Un semplice ed elegante procedimento dovuto al BELTRAMI *) mostra, in quella ipotesi, che tali condizioni sono necessarie e sufficienti per la esistenza di u, v, w. La ricerca delle condizioni analoghe, per la deformazione finita, è stata fatta recentemente dal sig. MANVILLE **); il procedimento da noi seguito non solo è più diretto, ma permette di assegnare ai secondi membri delle (15) e (16) una forma nuova, intimamente collegata colla forma Φ, reciproca della funzione caratteristica della deformazione, e mette quindi in rilievo l'importanza che nello studio della deformazione può avere tale forma Φ. Basandosi poscia sui risultati fondamentali ottenuti dal sig. RIQUIER per la esistenza degli integrali di qualunque sistema di equazioni alle derivate parziali ***), il sig. MANVILLE ha pure dimostrato che le (15) e (16) sono anche condizioni sufficienti.

Messina, novembre 1904.

R. MARCOLONGO.

---

*) *Teor. mat.*, etc., pag. 117 e seg.

**) *Sur la déformation finie d'un milieu continu* [Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Bordeaux (1903)].

***) *Sur une question fondamentale du calcul intégral* [Acta Mathematica, XXIII, pp. 203-332 (1900)].

LE MOMENT D'INERTIE D'UN SIMPLEXE $S(n+1)$ DE L'ESPACE E_n PAR RAPPORT À UN E_{n-1} DE CET E_n.

Note de M. **P. H. Sohoute**, à Groningue.

Adunanza dell'11 dicembre 1904.

Dans un intéressant Mémoire intitulé « *Sur les moments d'inertie des polygones et des polyèdres* » [Mém. de l'Acad. de Belgique, t. LIV (1900), n° 2, p. 15] M. G. Cesàro a publié le théoreme:

« Le moment d'inertie d'un tétraèdre, de volume V, par rapport à un plan duquel ses sommets sont distants de y_1, y_2, y_3, y_4, est

$$\frac{V}{10}\left(\sum y_1^2 + \sum y_1 y_2\right) ».$$

Le théorème suivant en contient la généralisation polydimensionale.

Théorème.—*Le moment d'inertie M d'un simplexe $S(n+1)$ de l'espace E_n à n dimensions par rapport à un espace quelconque E_{n-1} de cet E_n s'exprime dans le volume V du simplexe et les distances y_k, $(k=1, 2, \ldots n+1)$, des sommets du simplexe à cet espace E_{n-1} par la formule*

$$M = \frac{V}{2(n+2)_2}\left[\sum_1^{n+1} y_k^2 + \left(\sum_1^{n+1} y_k\right)^2\right].$$

La démonstration de cette formule par le calcul direct étant trop laborieuse, nous la prouvons par l'intermédiaire de trois lemmes. Nous y confondrons les notions « volume » et « masse », en supposant que l'unité de volume du simplexe homogène contienne l'unité de masse.

Lemme I. — *Si, pour comparer entre eux les moments d'inertie $M^{(p)}$ d'un polytope quelconque donné par rapport aux différents espaces $E_{n-1}^{(p)}$ passant par un même point O, on porte sur la normale OP en O à chaque espace $E_{n-1}^{(p)}$ à partir du point O de part et d'autre une longeur OA égale*

à $\frac{1}{\sqrt{M^{(p)}}}$, *le lieu géométrique des points A est un espace quadratique fermé* $Q_n^{(2)}$ *à centre O.*

Cet « espace d'inertie » s'appelle « espace central d'inertie », si le point O est le centre de gravité de la masse du polytope. Et la connaissance de cet espace central entraîne celle des moments d'inertie par rapport aux espaces E_{n-1} quelconques ne passant pas par le centre de gravité.

DÉMONSTRATION. — Soit O l'origine d'un système $O(X_1 X_2 \ldots X_n)$ de coordonnées rectangulaires. Par rapport à ce système l'équation

$$x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + \cdots + x_n \cos\alpha_n = 0 \tag{1}$$

représente l'espace $E_{n-1}^{(p)}$ par O, pour lequel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ désignent les angles de la normale OP avec les axes $OX_1, OX_2, \ldots OX_n$. Donc on trouve

$$M^{(p)} = \int r^2 dm = \int (x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_2 + \cdots + x_n \cos\alpha_n)^2 dm,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléménts de masse du polytope. En posant, pour raccourcir,

$$\int x_k^2 dm = A_{k,k}, \qquad \int x_k x_l dm = A_{k,l},$$

la dernière équation devient

$$M^{(p)} = \sum_1^n A_{k,k} \cos^2\alpha_k + 2\sum_1^n A_{k,l} \cos\alpha_k \cos\alpha_l .$$

Donc le lieu des points A en question est représenté par

$$\frac{1}{\rho^2} = \sum_1^n A_{k,k} \cos^2\alpha_k + 2\sum_1^n A_{k,l} \cos\alpha_k \cos\alpha_l ,$$

ou

$$\sum_1^n A_{k,k} x_k^2 + 2\sum_1^n A_{k,l} x_k x_l = 1,$$

ce qui devient en forme symbolique

$$(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n)^{(2)} = 1. \tag{2}$$

Ce lieu quadratique à centre O doit être un espace fermé, chaque rayon vecteur par O le rencontrant en deux points réels.

Pour le moment d'inertie par rapport à un espace $E_{n-1}^{(a)}$ parallèle à l'espace $E_{n-1}^{(p)}$ représenté par (1) à distance a on trouve

$$\int (r+a)^2 dm = \int r^2 dm + 2a \int r\, dm + a^2 \int dm.$$

Si O est le centre de gravité de la masse m, on a donc

(3) $$M^{(a)} = M^{(p)} + m a^2.$$

LEMME II. — *Si, dans le cas spécial du simplexe $S(n+1)$, on substitue dans le lemme précédent pour le moment d'inertie véritable $\int r^2 dm$ l'expression indiquée dans notre théorème, on obtient, pour le lieu des extrémités $\overline{A}$ des longueurs portées sur les normales, tout de même un espace quadratique fermé $\overline{Q}_n^{(2)}$ à centre O, menant, si O est le centre de gravité, de la même manière à la connaissance des moments d'inertie par rapport aux espaces E_{n-1} quelconques ne passant pas par ce centre de gravité.*

DÉMONSTRATION. — En représentant par

$$(y_{1,k}, y_{2,k}, \ldots y_{n,k})$$

les coordonnées du sommet P_k du simplexe, on trouve pour y_k figurant dans l'expression indiquée au théorème

$$y_{1,k} \cos\alpha_1 + y_{2,k}\cos\alpha_2 + \cdots + y_{n,k}\cos\alpha_n.$$

Donc on a

$$\overline{M}^{(p)} = \frac{m}{2(n+2)_2}\left\{\sum_1^n (y_{1,k}\cos\alpha_1 + y_{2,k}\cos\alpha_2 + \cdots + y_{n,k}\cos\alpha_n)^2 \right.$$
$$\left. + \left[\sum_1^n (y_{1,k}\cos\alpha_1 + y_{2,k}\cos\alpha_2 + \cdots + y_{n,k}\cos\alpha_n)\right]^2\right\}.$$

En indiquant par $\overline{A}_{k,k}$ et $2\overline{A}_{k,l}$ les coefficients de $\cos^2\alpha_k$ et $\cos\alpha_k\cos\alpha_l$, cette équation devient

$$\overline{M}^{(p)} = \sum_1^n \overline{A}_{k,k}\cos^2\alpha_k + 2\sum_1^n \overline{A}_{k,l}\cos\alpha_k\cos\alpha_l.$$

Donc, on trouve de la même manière

(4) $$(\overline{A}_1 x_1 + \overline{A}_2 x_2 + \cdots + \overline{A}_n x_n)^{(2)} = 1.$$

Et, si O est le centre de gravité du simplexe, on a $\sum_1^n y_k = 0$, de manière qu'on trouve

$$\overline{M}^a - \overline{M}^p = \frac{m}{2(n+2)_2}\left\{\left[\sum_1^{n+1}(y_k + a)^2 + (n+1)^2 a^2\right] - \sum_1^{n+1} y_k^2\right\},$$

ce qui se réduit à

$$\overline{M}^a = \overline{M}^p + m a^2,$$

comme l'exige la relation (3) dans le cas du moment d'inertie véritable.

Si O est le centre de gravité, l'expression indiquée dans le théorème se réduit à $\frac{m}{2(n+2)_2}\sum_1^{n+1} y_k^2$.

Lemme III. — *Les deux espaces quadratiques $Q_n^{(2)}$ et $\bar{Q}_n^{(2)}$ coïncident.*

Démonstration. — La démonstration de ce troisième lemme est la plus substantielle de toutes; elle se divise en deux parties bien différentes. Dans la première partie nous montrons par le calcul direct que l'expression indiquée au théorème représente effectivement le vrai moment d'inertie dans tous les cas où l'espace correspondant E_{n-1} est parallèle à deux espaces limitants opposés du simplexe contenant ensemble les $n+1$ sommets. Et dans la seconde partie nous faisons voir que cela suffit pour la coïncidence des deux espaces quadratiques.

Soient E_{p-1} et E_{n-p} deux espaces limitants opposés du simplexe $S(n+1)$ et représentons par h la distance de ces espaces et par V_{p-1} et V_{n-p} les volumes des simplexes $S_p(P_1P_2...P_p)$ et $S_{n-p+1}(P_{p+1}P_{p+2}...P_{n+1})$ qu'ils contiennent. Soit $E_{n-1}^{(p)}$ l'espace $n-1$-dimensional passant par E_{p-1} et parallèle à E_{n-p}. Considérons l'intersection du simplexe $S(n+1)$ avec l'espace $E_{n-1}^{(x)}$ parallèle à E_{n-1}^{p} à une distance x et situé du côté de E_{n-p}. On s'imagine ce polytope $n-1$-dimensional de la manière suivante. Soient $S_p^{(x)}$ et $S_{n-p+1}^{(x)}$ les simplexes d'intersection de $E_{n-1}^{(x)}$ avec les cônes à bases S_p et S_{n-p+1}, le sommet du premier étant un point quelconque de E_{n-p} et celui du second un point quelconque de E_{p-1}; cela posé, on obtient l'intersection cherchée en faisant parcourir chaque point de $S_p^{(x)}$ un simplexe équipollent à $S_{n-p+1}^{(x)}$. Donc les deux intégrales

$$\int_0^h \lambda V_{p-1}V_{n-p}\left(\frac{h-x}{h}\right)^{p-1}\left(\frac{x}{h}\right)^{n-p}x^2dx,\quad \int_0^h \lambda V_{p-1}V_{n-p}\left(\frac{h-x}{h}\right)^{p-1}\left(\frac{x}{h}\right)^{n-p}dx,$$

où λ représente le même coefficient numérique dépendant des angles formés par E_{p-1} et E_{n-p}, font connaître respectivement le moment d'inertie de la masse m et la masse m elle-même. Par la substitution $x = h\sin^2\varphi$ on trouve donc

$$M^{(p)} = mh^2\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi^{2(n-p)+5}\cos^{2p-1}d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi^{2(n-p)+1}\cos^{2p-1}d\varphi}.$$

Eu égard à la formule de réduction

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu}\varphi\cos^{\nu}\varphi\, d\varphi = \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mu-2}\varphi\cos^{\nu}\varphi\, d\varphi,$$

ce résultat se transforme en

di questo problema fu il CASORATI *), il quale fece vedere come tutti gli invarianti differenziali di una forma quadratica binaria possano aversi algebricamente con un processo di pura eliminazione.

Tale risultato fu generalizzato dal prof. RICCI: questi, partendo da una importante osservazione di CHRISTOFFEL **), mostrò ***) che la determinazione di tutti gli invarianti differenziali di un sistema di forme, delle quali almeno una sia quadratica, può ridursi a quella degli invarianti algebrici di un sistema di forme.

Il prof. SOMIGLIANA †) cercò poi di dare al metodo del prof. RICCI la massima generalità liberandolo dalla condizione che il sistema di forme che si considera ne contenga una quadratica. Ma per la applicazione dei suoi risultati, come egli stesso osserva, si richiede che il sistema contenga almeno una forma tale che possa con una sostituzione ridursi ad avere tutti i coefficienti costanti e che soddisfi ad alcune altre condizioni esprimenti la possibilità di risolvere certi sistemi di equazioni lineari: queste limitazioni tolgono però molta importanza alla ricerca di questo Autore.

In questo lavoro, che ha pure per iscopo la estensione dei risultati del prof. RICCI, io, giovandomi dei simboli relativi ad una forma differenziale già considerati dal prof. PASCAL ††) e da me †††), dimostro che la determinazione di molti invarianti differenziali di un sistema di forme qualunque può sempre ridursi a quella degli invarianti algebrici di un sistema di forme, quando una delle forme del sistema abbia un invariante algebrico diverso da zero ed il determinante che dà il valore della sua *forma hessiana* (§ 3) abbia la caratteristica non minore di $n-1$, se n è il numero delle variabili (anzi per la determinazione degli invarianti differenziali di primo ordine basta sia soddisfatta solo la seconda di queste

---

*) CASORATI, *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe*, etc. [Annali di Matematica, s. I, t. III e IV (1860-1861)].

**) CHRISTOFFEL, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke*, etc. [Journ. für die reine u. ang. Math., Bd. LXX (1869), pp. 46-70], § 6, pag. 56.

***) RICCI e LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu*, etc. [Mathematische Annalen, Bd. LIV (1901), pp. 125-201].

†) SOMIGLIANA, *Sulla trasformazione delle equazioni lineari, omogenee*, etc. [Annali di Matematica, s. II, t. XVIII (1890)], § 8, pag. 293.

††) PASCAL, *Sulla costruzione dei simboli a carattere invariantivo*, etc. [Rendiconti Accademia Lincei, s. V, t. XII (1° semestre 1903), pag. 377].

†††) *I simboli di* CHRISTOFFEL *estesi*, etc. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII (1903), pag. 287].

condizioni). Pel carattere invariantivo di queste condizioni si potrà sempre subito vedere se esse sono o no soddisfatte, mentre non sarà sempre facile di potere stabilire se per una forma si verifichino o no le condizioni richieste dal prof. SOMIGLIANA.

Inoltre le condizioni che io trovo corrispondono esattamente a quella che si richiede nel calcolo differenziale assoluto del prof. RICCI, che cioè il discriminante della forma quadratica non sia identicamente nullo.

È bene infine osservare che lo studio delle equazioni alle derivate parziali cui soddisfanno gli invarianti differenziali, studio cominciato da LIE *), proseguito da ZORAWSKI **), LEVI-CIVITA ***) e da altri, se ha servito a dimostrare alcune notevoli loro proprietà può però difficilmente condurre alla effettiva determinazione degli invarianti stessi.

§ 1. — Sistemi di forme differenziali.

Se la forma differenziale di primo ordine e di grado r

$$X^{(r)} \equiv \sum_{i_1 \dots i_r} X_{i_1 \dots i_r} d x_{i_1} \dots d x_{i_r},$$

i cui coefficienti $X_{i_1 \dots i_r}$ supporremo siano funzioni regolari nel punto generico $(x_1^0 \dots x_n^0)$ delle n variabili $x_1 \dots x_n$, il cui valore non cambia comunque si permutino fra loro gli indici $i_1 \dots i_r$ colla sostituzione

$$y_i = y_i(x_1 \dots x_n) \qquad (i = 1, \dots n) \tag{1}$$

$\left(\text{ove } D \equiv \dfrac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \neq 0\right)$, si muta nella forma

$$Y^{(r)} \equiv \sum_{h_1 \dots h_r} Y_{h_1 \dots h_r} d y_{h_1} \dots d y_{h_r};$$

si ha

$$X_{i_1 \dots i_r} = \sum_{h_1 \dots h_r} Y_{h_1 \dots h_r} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{h_r}}{\partial x_{i_r}}.$$

Perciò la forma differenziale di primo ordine e di grado $r - s$

$$X^{(r-s)}_{i_{r-s+1} \dots i_r} \equiv \sum_{i_1 \dots i_{r-s}} X_{i_1 \dots i_r} d x_{i_1} \dots d x_{i_{r-s}},$$

---

*) LIE, *Ueber Differentialinvarianten* [Mathematische Annalen, Bd. XXIV (1884), pp. 537-578].

**) ZORAWSKI, *Ueber Biegungsinvarianten* [Acta Mathematica, t. XVI (1892)].

***) LEVI-CIVITA, *Sugli invarianti assoluti* [Atti Istituto Veneto, s. VII, t. V (1893-94), pag. 1447].

formata coi coefficienti della $X^{(r)}$ che hanno s degli r indici comuni, e quindi tale che

$$X^{(r)} = \sum_{i_{r-s+1}\dots i_r} X^{(r-s)}_{i_{r-s+1}\dots i_r} d x_{i_{r-s+1}} \dots d x_{i_r},$$

se

$$Y^{(r-s)}_{h_{r-s+1}\dots h_r} \equiv \sum_{h_1\dots h_{r-s}} Y_{h_1\dots h_r} d y_{h_1} \dots d y_{h_{r-s}}$$

e

$$Y^{(r)} = \sum_{h_{r-s+1}\dots h_r} Y^{(r-s)}_{h_{r-s+1}\dots h_r} d y_{h_{r-s+1}} \dots d y_{h_r},$$

soddisfa alla relazione

$$(2) \qquad X^{(r-s)}_{i_{r-s+1}\dots i_r} = \sum_{h_{r-s+1}\dots h_r} Y^{(r-s)}_{h_{r-s+1}\dots h_r} \frac{\partial y_{h_{r-s+1}}}{\partial x_{i_{r-s+1}}} \dots \frac{\partial y_{h_r}}{\partial x_{i_r}};$$

cioè: *le forme* $X^{(r-s)}_{i_{r-s+1}\dots i_r}$ *con una sostituzione di variabili si trasformano colla stessa legge colla quale si trasformano i coefficienti di una forma differenziale di primo ordine e di grado* s.

Posto ciò, abbiasi un sistema di m forme differenziali ennarie aventi i gradi $r_1 \dots r_m$

$$X^{(r_k)} \equiv \sum_{i_1\dots i_{r_k}} X_{i_1\dots i_{r_k}} d x_{i_1} \dots d x_{i_{r_k}} \qquad (k = 1, \dots m)$$

diremo che le m forme $X^{(r_k)}$ sono fra loro *linearmente indipendenti* quando non esiste alcun sistema di forme differenziali $T^{(t_k)}$ tali che si abbia

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{m} T^{(t_k)} X^{(r_k-1)}_s = 0; \qquad (s = 1, \dots n)$$

se ciò si verificasse si avrebbe anche evidentemente

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{m} T^{(t_k)} X^{(r_k)} = 0.$$

I gradi t_k delle forme $T^{(t_k)}$ soddisferanno poi alle relazioni *)

$$r_1 + t_1 = r_2 + t_2 = \dots = r_m + t_m.$$

Consideriamo poi la matrice

$$(5) \qquad \begin{Vmatrix} X^{(r_1-1)}_1 & \dots & X^{(r_m-1)}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ X^{(r_1-1)}_n & \dots & X^{(r_m-1)}_n \end{Vmatrix}$$

i cui elementi sono le forme differenziali $X^{(r_k-1)}_s$: i determinanti di qualunque ordine tratti dalla matrice (5) sono altrettante forme differenziali,

*) Qui ammettiamo che il sistema di forme che si considera non consti di più sistemi di forme non indipendenti.

epperò potremo estendere alla matrice (5) l'ordinario concetto di caratteristica e concludere che: *la condizione necessaria e sufficiente perchè di un sistema di m forme differenziali ve ne siano p di linearmente indipendenti è che la caratteristica della matrice* (5) *relativa al detto sistema sia appunto p.*

Se colla sostituzione (1) la forma $X^{(r_k)}$ si muta nell'altra

$$Y^{(r_k)} \equiv \sum_{h_1 \dots h_{r_k}} Y_{h_1 \dots h_{r_k}} dy_{h_1} \dots dy_{h_{r_k}} = \sum_{s=1}^{n} Y_s^{(r_k-1)} dy_s ,$$

la matrice (5) relativa al sistema trasformato è

$$(5'') \qquad \left\| \begin{matrix} Y_1^{(r_1-1)} & \dots & Y_1^{(r_m-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_n^{(r_1-1)} & \dots & Y_n^{(r_m-1)} \end{matrix} \right\| ;$$

d'altra parte, per la (2), la matrice (5) può ottenersi come prodotto per colonne della matrice (5″) per la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| .$$

Dunque: *la caratteristica della matrice* (5) *è un invariante del sistema delle forme $X^{(r_k)}$ rispetto ad ogni trasformazione di variabili;* od, in altre parole, *un sistema di m forme differenziali, delle quali solo p sono linearmente indipendenti fra loro, viene trasformato da una sostituzione qualsiasi in un altro sistema di forme, delle quali soltanto p saranno pure linearmente indipendenti.*

Il criterio per giudicare della indipendenza lineare di più forme può modificarsi nel caso in cui tutte le forme abbiano uguale grado: infatti se si ha il sistema di forme di uguale grado

$$X_{(k)}^{(r)} = \sum_{i_1 \dots i_r} X_{i_1 \dots i_r (k)} dx_{i_1} \dots dx_{i_r} \qquad (k = 1, \dots m),$$

anche le forme T dovranno avere lo stesso grado t. E se supponiamo che tutti i coefficienti della forma $T_{(k)}^{(t)}$ siano uguali a φ_k, per la (3), le forme $X_{(k)}^{(r)}$ saranno linearmente indipendenti quando non esiste alcun sistema di funzioni φ_k tali che

$$\sum_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_{r+t}} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k X_{i_1 \dots i_r (k)} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r-1}} dx_{i_{r+1}} \dots dx_{i_{r+t}} = 0 \quad (i_r = 1, \dots n),$$

ossia tali che

(6) $$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k X_{i_1 \dots i_r(k)} = 0 \qquad (i_1 \dots i_r = 1, \dots n);$$
e quindi
(6') $$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k X_{(k)}^{(r)} = 0.$$

Viceversa, dalla (6') possiamo dedurre la (6) e concludere che *m forme differenziali di uguale grado $X_{(k)}^{(r)}$ sono linearmente indipendenti quando non esiste alcun sistema di funzioni φ_k tali da rendere possibile la identità* (6').

Formiamo ora la matrice

$$(\mathfrak{M}) \equiv \| X_{i_1 \dots i_r(1)} \; \dots \; X_{i_1 \dots i_r(m)} \|,$$

che ha m colonne ed $\binom{n+r-1}{r}$ linee corrispondenti a tutte le combinazioni con ripetizione della classe r^{ma} degli indici $1, 2, \dots n$ (ponendo nella stessa linea le X aventi la stessa combinazione di indici i). Col metodo già usato in altra Nota *) si può vedere che la caratteristica della matrice $(\mathfrak{M})$ è invariante per ogni trasformazione di variabili. Inoltre, se solo p delle m forme $X_{(k)}^{(r)}$ sono fra loro linearmente indipendenti, per la (6) la caratteristica della matrice $(\mathfrak{M})$ sarà p; e viceversa, se la caratteristica della matrice $(\mathfrak{M})$ è p, solo p delle m forme $X_{(k)}^{(r)}$ saranno fra loro linearmente indipendenti.

§ 2. — Covarianti ed invarianti algebrici. — Forma jacobiana.

Una forma differenziale può considerarsi come una forma algebrica nei differenziali e, poichè operando sopra essa una sostituzione di variabili i differenziali vengono espressi in funzioni lineari omogenee dei differenziali delle nuove variabili, potremo per la ricerca dei covarianti ed invarianti algebrici delle forme differenziali applicare i risultati della teoria delle forme algebriche.

Sicchè, se consideriamo un sistema di n forme $X^{(r_k)}$ e poniamo simbolicamente

$$X^{(r_k)} = a_{(k)dx}^{r_k} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \, dx_i \right)^{r_k} \qquad (k = 1, \dots n),$$

di guisa che $a_{i_1 k} \dots a_{i_{r_k} k}$ è il simbolo di $X_{i_1 \dots i_{r_k}}$, la formola

*) *I simboli di* Christoffel *estesi*, etc. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII (1903), pag. 287].

$$(7) \qquad (X^{(r_1)}, \ldots X^{(r_n)})^p = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^p a^{r_1-p}_{(1)dx} \ldots a^{r_n-p}_{(n)dx},$$

ove $p = 1, 2, \ldots q$, essendo q il più piccolo dei numeri $r_1 \ldots r_n$, definirà q covarianti algebrici del sistema dato; cioè si avrà

$$(X^{(r_1)} \ldots X^{(r_n)})^p = D^p (Y^{(r_1)} \ldots Y^{(r_n)})^p.$$

Per le forme differenziali binarie la espressione non simbolica della forma covariante (7) è evidentemente

$$(X^{(r)}, X^{(s)})^p = \sum_{\sigma=0}^{p} (-1)^\sigma \binom{p}{\sigma} X^{(r-p)}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-\sigma}\underbrace{2\ldots2}_{\sigma}} X^{(s-p)}_{\underbrace{1\ldots1}_{\sigma}\underbrace{2\ldots2}_{p-\sigma}}.$$

Quando le $X^{(r_k)}$ sono tutte uguali fra loro, prendendo p pari, si ha dalla (7) una classe di forme differenziali covarianti ad una forma data. In tale caso, se questa è di grado r impari, prendendo $p = r - 1$, abbiamo dalla (7) una forma differenziale covariante alla forma data e di grado n (numero delle variabili).

Se poi $X^{(r_k)} = X^{(r)}$ ed r è pari, ponendo $p = r$ ricaviamo dalla (7) l'invariante

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^r$$

della forma differenziale $X^{(r)}$. Partendo da questo invariante il prof. SOMIGLIANA *) ha esteso alle forme di grado pari il concetto ordinario di reciprocità ed ha costruito una espressione contenente oltre ai coefficienti della forma $X^{(r)}$ (con r pari), le derivate prime di r funzioni arbitrarie e che rispetto alla $X^{(r)}$ si comporta esattamente come *il parametro differenziale misto* del BELTRAMI rispetto ad una forma differenziale quadratica.

Poichè

$$a_{s,k} a^{r_k-1}_{(k)dx} = a_{s,k} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} dx_i \right)^{r_k-1} = \sum_{i_1 \ldots i_{r_k-1}} X_{i_1 \ldots i_{r_k-1}, s} dx_{i_1} \ldots dx_{i_{r_k-1}} = X_s^{(r_k-1)},$$

la (7) per $p = 1$ dà

$$(8) \qquad (X^{(r_1)} \ldots X^{(r_n)}) = \begin{vmatrix} X_1^{(r_1-1)} & \ldots & X_1^{(r_n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n^{(r_1-1)} & \ldots & X_n^{(r_n-1)} \end{vmatrix};$$

ed il covariante simultaneo delle forme $X^{(r_k)}$ definito dalla (8), covariante

*) SOMIGLIANA, loco cit., § 6.

che diremo la *forma jacobiana* relativa alle forme differenziali $X^{(r_k)}$, non è identicamente nullo, solo quando le forme $X^{(r_k)}$ sono fra loro linearmente indipendenti.

Denotando con $K^{(a)}$ la forma jacobiana relativa alle forme $X^{(r_k)}$, il suo grado a sarà dato da

$$a = \sum_{h=1}^{n} r_h - n;$$

e se $K_p^{(a_k)}$ è il complemento algebrico di $X_p^{(r_k-1)}$ in $K^{(a)}$, cioè se

$$K^{(a)} = \sum_{p=1}^{n} K_p^{(a_k)} X_p^{(r_k-1)},$$

ove $a_k = \sum_{h=1}^{n} r_h - r_k - (n-1)$, si avrà:

$$K_p^{(a_k)} = \begin{vmatrix} X_1^{(r_1-1)} & \dots & X_{p-1}^{(r_1-1)} & 0 & X_{p+1}^{(r_1-1)} & \dots & X_n^{(r_1-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{(r_{k-1}-1)} & \dots & X_{p-1}^{(r_{k-1}-1)} & 0 & X_{p+1}^{(r_{k-1}-1)} & \dots & X_n^{(r_{k-1}-1)} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ X_1^{(r_{k+1}-1)} & \dots & X_{p-1}^{(r_{k+1}-1)} & 0 & X_{p+1}^{(r_{k+1}-1)} & \dots & X_n^{(r_{k+1}-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{(r_n-1)} & \dots & X_{p-1}^{(r_n-1)} & 0 & X_{p+1}^{(r_n-1)} & \dots & X_n^{(r_n-1)} \end{vmatrix}.$$

Se ora poniamo

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

essendo per la (2)

$$Y_s^{(r_k-1)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(r_k-1)} \frac{\partial x_i}{\partial y_s},$$

moltiplicando fra loro per linee i determinanti che dànno i valori di $K_p^{(a_k)}$ e D_1, dopo una facile riduzione (essendo $D.D_1 = 1$) si ottiene

$$K_p^{(a_k)} = D . \begin{vmatrix} Y_1^{(r_1-1)} & \dots & Y_1^{(r_{k-1}-1)}, & \dfrac{\partial x_p}{\partial y_1}, & Y_1^{(r_{k+1}-1)} & \dots & Y_1^{(r_n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n^{(r_1-1)} & \dots & Y_n^{(r_{k-1}-1)}, & \dfrac{\partial x_p}{\partial y_n}, & Y_n^{(r_{k+1}-1)} & \dots & Y_n^{(r_n-1)} \end{vmatrix};$$

e denotando con $K_p'^{(a_k)}$ la forma che si ottiene dalla $K^{(a_k)}$ sostituendo

alle $X_p^{(r_k-1)}$ le $Y_p^{(r_k-1)}$ avremo

$$K_p^{(a_k)} = D \sum_{s=1}^{n} K_s'^{(a_k)} \frac{\partial x_p}{\partial y_s} .$$

Perciò le forme

$$\Phi^{(r_k a_k)} = \sum_{i_1 \ldots i_{r_k}} X_{i_1 \ldots i_{r_k}} K_{i_1}^{(a_k)} \ldots K_{i r_k}^{(a_k)} \qquad (k = 1, \ldots n)$$

sono tali che, ponendo

$$\Phi'^{(r_k a_k)} = \sum_{h_1 \ldots h_{r_k}} Y_{h_1 \ldots h_{r_k}} K_{h_1}'^{(a_k)} \ldots K_{h r_k}'^{(a_k)} ,$$

si ha

$$\Phi^{(r_k a_k)} = D^{r_k} \Phi'^{(r_k a_k)} ;$$

cioè *ciascuna delle n forme differenziali $\Phi^{(r_k a_k)}$ è un covariante simultaneo delle forme $X^{(r_k)}$.*

E se $U = U(x_1 \ldots x_n)$ è una funzione arbitraria delle x, la forma differenziale

$$\Delta^{(a_k)}(U) = \sum_{p=1}^{n} K_p^{(a_k)} \frac{\partial U}{\partial x_p}$$

è tale che ponendo

$$\Delta'^{(a_k)}(U) = \sum_{p=1}^{n} K_p'^{(a_k)} \frac{\partial U}{\partial y_p}$$

si ha

$$\Delta^{(a_k)}(U) = D \, . \, \Delta'^{(a_k)}(U) ;$$

si ottengono così delle forme differenziali contenenti le derivate prime di una funzione arbitraria e che rispetto ad un sistema di forme differenziali di grado qualunque si comportano in modo analogo a quelli dei parametri differenziali di primo ordine rispetto alle forme differenziali quadratiche.

§ 3. — Forma hessiana. — Simboli di 2ª specie.

Se $n!H$ è la forma differenziale che si ottiene dalla (7) quando tutte le n forme $X^{(r_k)}$ sono uguali ad $X^{(r)}$ e $p = 2$ abbiamo

$$n!H = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 a_{(1)dx}^{r-2} \ldots a_{(n)dx}^{r-2}$$

ed i coefficienti simbolici collo stesso primo indice saranno tutti fra loro equivalenti.

Ora

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \sum_i a_{1i}^2 & \dots & \sum_i a_{1i} a_{ni} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_i a_{ni} a_{1i} & \dots & \sum_i a_{ni}^2 \end{vmatrix} = \sum_{i_1 \dots i_n} \begin{vmatrix} a_{1i_1}^2 & \dots & a_{1i_n} a_{ni_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ni_1} a_{1i_1} & \dots & a_{ni_n}^2 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$H = \begin{vmatrix} a_{11}^2 & \dots & a_{1n} a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} a_{11} & \dots & a_{nn}^2 \end{vmatrix} a_{(1)dx}^{r-2} \dots a_{(n)dx}^{r-2} ;$$

ma

$$a_{sk} a_{tk} a_{(k)dx}^{r-2} = a_{sk} a_{tk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} dx_i \right)^{r-2} = \sum_{i_1 \dots i_{r-2}} X_{i_1 \dots i_{r-2} st} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r-2}} = X_{s,t}^{(r-2)},$$

dunque

$$H = \begin{vmatrix} X_{11}^{(r-2)} & \dots & X_{1n}^{(r-2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n1}^{(r-2)} & \dots & X_{nn}^{(r-2)} \end{vmatrix} .$$

La forma differenziale H, che diremo *la forma hessiana* della forma data, è dunque una forma di grado $n(r-2)$ covariante alla forma stessa $X^{(r)}$, come potrebbe verificarsi direttamente applicando la (2).

Supponiamo che la forma hessiana della forma differenziale $X^{(r)}$ sia identicamente nulla: allora le n forme $X_1^{(r-1)} \dots X_n^{(r-1)}$ non saranno linearmente indipendenti fra loro, esisterà cioè (§ 1) un sistema di funzioni ξ_k tali che

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k X_k^{(r-1)} = 0,$$

ossia tali che

$$\sum_{i_r=1}^{n} X_{i_1 \dots i_r} \xi_{i_r} = 0 \qquad (i_1 \dots i_{r-1} = 1, \dots n). \tag{9}$$

E gli $n-1$ integrali indipendenti $y_1 \dots y_{n-1}$ della equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

costituiranno un sistema di integrali del sistema di equazioni ordinarie

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} . \tag{9'}$$

Formiamoci ora la sostituzione individuata dalle funzioni $y_1 \dots y_{n-1}$ e da un'altra qualunque funzione y_n delle x, purchè indipendente dalle precedenti, e consideriamo le x come funzioni delle y. Le derivate par-

ziali $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ sono i rapporti dei differenziali delle x_i ed y_n quando si suppongano $y_1 \ldots y_{n-1}$ costanti; dunque per le (9'):

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \tau \xi_i$$

e per la (9):

$$\sum_{i_r=1}^{n} X_{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial x_{i_r}}{\partial y_n} = 0 \qquad (i_1 \ldots i_{r-1} = 1, \ldots n);$$

quindi, se la sostituzione che si considera muta la forma $X^{(r)}$ nella $Y^{(r)}$, sarà

$$Y_{h_1 \ldots h_{r-1} n} = 0 \qquad (h_1 \ldots h_{r-1} = 1, \ldots n).$$

Concludiamo perciò che *una forma differenziale ennaria di grado qualunque avente nulla la forma hessiana può trasformarsi in un'altra contenente i differenziali di non più di $n - 1$ delle nuove variabili*; i coefficienti della forma trasformata saranno però in generale funzioni di tutte le nuove variabili *).

È evidente che sussiste anche il reciproco del precedente teorema. Possiamo anche dire che quando la forma hessiana della forma $X^{(r)}$ è nulla, alla equazione ai differenziali totali di primo ordine e di grado r

$$(9'') \qquad X^{(r)} = 0$$

possiamo soddisfare con non più di $n - 1$ relazioni fra le variabili.

In particolare se l'hessiano della forma $X^{(r)}$ ha la caratteristica 1, anche le matrice ($\mathfrak{M}$) relativa alle forme $X_1^{(r-1)} \ldots X_n^{(r-1)}$ avrà (§ 1) la stessa caratteristica 1 e perciò la $X^{(r)}$ sarà la potenza r^{ma} di una ordinaria espressione pfaffiana; sicchè, pel teorema di GRASSMANN **), se la *classe* di questa espressione pfaffiana è pari ($= 2\lambda$) od è impari ($= 2\lambda - 1$) alla (9'') si potrà soddisfare con λ relazioni fra le variabili.

Per le ricerche che ci proponiamo di fare è importante di vedere come si trasformano, con un mutamento di variabili, le forme H_{jk} che sono i complementi algebrici delle forme $X_{jk}^{(r-2)}$ nel determinante che dà

*) Il prof. PASCAL ha determinato le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma differenziale di ordine qualunque possa trasformarsi in un'altra contenente una variabile di meno. Cfr.: *I problemi di riduzione per le forme*, etc. [Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. XII, 2° semestre 1903, pag. 544].

**) WEBER, *Vorlesungen uber das* PFAFF'*sche Problem*, pag. 157. Leipzig, 1900.

l'espressione della forma hessiana H della forma $X^{(r)}$; sarà perciò

$$H_{j,k} \equiv \left| \begin{array}{ccccccc} X^{(r-2)}_{1,1} & \dots & X^{(r-2)}_{j-1,1} & 0 & X^{(r-2)}_{j+1,1} & \dots & X^{(r-2)}_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^{(r-2)}_{1,k-1} & \dots & X^{(r-2)}_{j-1,k-1} & 0 & X^{(r-2)}_{j+1,k-1} & \dots & X^{(r-2)}_{n,k-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ X^{(r-2)}_{1,k+1} & \dots & X^{(r-2)}_{j-1,k+1} & 0 & X^{(r-2)}_{j+1,k+1} & \dots & X^{(r-2)}_{n,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^{(r-2)}_{1,n} & \dots & X^{(r-2)}_{j-1,n} & 0 & X^{(r-2)}_{j+1,n} & \dots & X^{(r-2)}_{n,n} \end{array} \right| ;$$

$H_{j,k}$ è dunque una forma di primo ordine e di grado $(n-1)(r-2)$ e tale che $H_{j,k} = H_{k,j}$ (essendo H un determinante simmetrico). Moltiplicando $H_{j,k}$ per D_1, si ha dopo una facile riduzione (poichè $D.D_1 = 1$)

$$H_{j,k} = D \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \left| \begin{array}{ccccccc} \sum_i X^{(r-2)}_{i,1} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k-1} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} & 0 & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k+1} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,n} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i X^{(r-2)}_{i,1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s-1}} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k-1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s-1}} & 0 & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k+1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s-1}} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,n} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_i X^{(r-2)}_{i,1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s+1}} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k-1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s+1}} & 0 & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k+1} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s+1}} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,n} \frac{\partial x_i}{\partial y_{s+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i X^{(r-2)}_{i,1} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k-1} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} & 0 & \sum_i X^{(r-2)}_{i,k+1} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} & \dots & \sum_i X^{(r-2)}_{i,n} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \end{array} \right| ;$$

e moltiplicando ancora per D_1, poichè per la (2)

$$Y^{(r-2)}_{s,t} = \sum_{i,h} X^{(r-2)}_{i,h} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial y_t} ,$$

si ottiene

$$H_{j,k} = D^2 \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \left| \begin{array}{ccccccc} Y^{(r-2)}_{11} & \dots & Y^{(r-2)}_{s-1,1} & \frac{\partial x_k}{\partial y_1} & Y^{(r-2)}_{s+1,1} & \dots & Y^{(r-2)}_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y^{(r-2)}_{1,n} & \dots & Y^{(r-2)}_{s-1,n} & \frac{\partial x_k}{\partial y_n} & Y^{(r-2)}_{s+1,n} & \dots & Y^{(r-2)}_{n,n} \end{array} \right| .$$

Quindi, denotando con $H'_{s,t}$ il complemento algebrico di $Y^{(r-2)}_{s,t}$ nel determinante

$$H' = \left| \begin{array}{ccc} Y^{(r-2)}_{11} & \dots & Y^{(r-2)}_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y^{(r-2)}_{1,n} & \dots & Y^{(r-2)}_{n,n} \end{array} \right| ,$$

avremo

(10) $$H_{j,k} = D^2 \sum_{s,t=1}^{n} H'_{s,t} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_t} .$$

Per tutte le forme differenziali, delle quali avremo in seguito a considerare la forma hessiana, supporremo che le forme $H_{j,k}$ non siano *tutte* identicamente nulle, cioè supporremo che la caratteristica di H non sia inferiore di $n - 1$. Questa condizione, sempre soddisfatta per le forme differenziali binarie, porta nel caso delle forme differenziali ternarie ad escludere dalle nostre considerazioni soltanto le forme che sono potenze di ordinarie espressioni pfaffiane.

Segue subito dalla (10) che date tre forme differenziali $X^{(r)}$, $X^{(s)}_{(1)}$, $X^{(r)}_{(2)}$, delle quali due di uguale grado, se H è la forma hessiana relativa alla $X^{(r)}$ e

$$\Psi = \sum_{i,h} X_{i_1 \ldots i_s(1)} X_{h_1 \ldots h_s(2)} H_{i_1 h_1} \ldots H_{i_s h_s}$$

$$\Psi' = \sum_{i,h} Y_{i_1 \ldots i_s(1)} Y_{h_1 \ldots h_s(2)} H'_{i_1 h_1} \ldots H'_{i_s h_s}$$

si ha

$$\Psi = D^{2s}.\Psi',$$

cioè Ψ è un covariante simultaneo delle forme stesse $X^{(r)}$, $X^{(s)}_{(1)}$, $X^{(s)}_{(2)}$. Se si hanno invece due forme differenziali $X^{(r)}$, $X^{(s)}$ ed H è la forma hessiana della $X^{(r)}$, prese s funzioni arbitrarie U_i, ponendo

$$\Gamma(U_1 \ldots U_s) = \sum_{i,h} X_{i_1 \ldots i_s} H_{i_1 h_1} \ldots H_{i_s h_s} \frac{\partial U_1}{\partial x_{h_1}} \cdots \frac{\partial U_s}{\partial x_{h_s}}$$

$$\Gamma'(U_1 \ldots U_s) = \sum_{i,h} Y_{i_1 \ldots i_s} H'_{i_1 h_1} \ldots H'_{i_s h_s} \frac{\partial U}{\partial y_{h_1}} \cdots \frac{\partial U}{\partial y_{h_s}}$$

la forma differenziale $\Gamma(U_1 \ldots U_s)$ soddisfa alla relazione

$$\Gamma(U_1 \ldots U_s) = D^{2s}\Gamma'(U_1 \ldots U_s)$$

ed è quindi un covariante simultaneo delle forme

$$X^{(r)},\ X^{(s)},\ dU_1 \ldots dU_s .$$

Considerando poi la sola forma $X^{(r)}$, dette U, V due funzioni arbitrarie, la forma differenziale

$$\nabla(U, V) = \sum_{i,h} H_{i,h} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_h}$$

ha il grado $(n - 1)(r - 2)$ ed è tale che, ponendo

$$\nabla'(U, V) = \sum_{i,h} H'_{i,h} \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial V}{\partial y_h},$$

si ha

$$\nabla(U, V) = D^2 . \nabla'(U, V);$$

cioè la forma $\nabla(U, V)$ si comporta come il parametro differenziale misto del BELTRAMI rispetto ad una forma differenziale quadratica.

Sia I un invariante algebrico non assoluto (cioè avente l'indice p diverso da zero) qualunque della forma $X^{(r)}$; sia cioè

$$I = D^p I',$$

essendo I' lo stesso invariante relativo alla forma $Y^{(r)}$ trasformata della $X^{(r)}$. Se poniamo

$$\mathfrak{H} = \frac{H}{I^{\frac{2}{p}}}; \quad \mathfrak{H}' = \frac{H'}{I'^{\frac{2}{p}}}; \quad \mathfrak{H}_{i,h} = \frac{H_{i,h}}{I^{\frac{2}{p}}}; \quad \mathfrak{H}'_{i,h} = \frac{H'_{i,h}}{I'^{\frac{2}{p}}}$$

avremo, per le formole precedenti:

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}', \quad \mathfrak{H}_{i,h} = \sum_{s,t} \mathfrak{H}'_{s,t} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \cdot \dfrac{\partial x_h}{\partial y_t} \\ \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{H}_{j,h} X^{(r-2)}_{i,h} = \begin{cases} \mathfrak{H} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \end{cases}$$

In un'altra Nota *) abbiamo considerato le espressioni

---

*) *I simboli di* CHRISTOFFEL *estesi*, etc. [Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XVII (1903) pp. 287-296].

A proposito dei simboli (12) crediamo interessante di notare che, come le derivate dei coefficienti di una forma differenziale quadratica si esprimono per mezzo di due simboli di CHRISTOFFEL di prima specie, anche le derivate dei coefficienti di una forma differenziale di ordine qualunque sono combinazioni lineari di tanti simboli (12). Infatti, supponendo $r > 2$, dalla (12) ricaviamo

$$(a) \quad \begin{cases} \sum_{s=1}^{r} \begin{bmatrix} h i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_r \\ i_s \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{r} \dfrac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_s}} \\ - \sum_{s=2}^{r} \sum_{t=1}^{s-1} \dfrac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_t}} - \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{t=s+1}^{r} \dfrac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_t}} - r \dfrac{\partial X_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x_h}. \end{cases}$$

Ora si vede facilmente che

$$\sum_{s=2}^{r} \sum_{t=1}^{s-1} \frac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_t}} = \sum_{s=1}^{r-1} (r - s) \frac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_s}}$$

$$\sum_{s=1}^{r-1} \sum_{t=s+1}^{r} \frac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_t}} = \sum_{s=2}^{r} (s - 1) \frac{\partial X_{h i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_r}}{\partial x_{i_s}};$$

sicchè, sommando queste due relazioni, troviamo

$$(12)\qquad \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{bmatrix} = \frac{\partial X_{i_1\dots i_r}}{\partial x_h} - \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial X_{h i_1\dots i_{s-1} i_{s+1}\dots i_r}}{\partial x_{i_s}},$$

che abbiamo chiamato i *simboli* relativi alla forma $X^{(r)}$, ed abbiamo dimostrato che, distinguendo con un accento i simboli relativi alla forma $Y^{(r)}$ trasformata della $X^{(r)}$, si ha

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{bmatrix} = & \sum_{j_1\dots j_r k} \begin{bmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ & k & \end{bmatrix}' \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ & - 2 \sum_{j_1\dots j_r} Y_{j_1\dots j_r} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{r-1} \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}_{yx} \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_h}, \end{aligned} \right.$$

ove il simbolo $\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{r-1} \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}_{yx}$ denota una certa somma di prodotti di derivate delle y rispetto alle x che abbiamo allora determinato.

Ponendo ora

$$(14)\quad \left\{ \begin{matrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{matrix} \right\} = \sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{H}_{h,\sigma} \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & \sigma & \end{bmatrix}, \qquad \left\{ \begin{matrix} j_1 & \dots & j_r \\ & k & \end{matrix} \right\}' = \sum_{\sigma=1}^{n} \mathfrak{H}'_{k,\sigma} \begin{bmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ & \sigma & \end{bmatrix}'$$

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{s-1} \frac{\partial X_{h i_1\dots i_{t-1} i_{t+1}\dots i_r}}{\partial x_{i_t}} + \sum_{s=1}^{r-1}\sum_{t=s+1}^{r} \frac{\partial X_{h i_1\dots i_{t-1} i_{t+1}\dots i_r}}{\partial x_{i_t}}$$
$$= (r-1) \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial X_{h i_1\dots i_{s-1} i_{s+1}\dots i_r}}{\partial x_{i_s}};$$

con che la (a) dà

$$(b)\quad r\frac{\partial X_{i_1\dots i_r}}{\partial x_h} + (r-2)\sum_{s=1}^{r} \frac{\partial X_{h i_1\dots i_{s-1} i_{s+1}\dots i_r}}{\partial x_{i_s}} = - \sum_{s=1}^{r} \begin{bmatrix} h\, i_1 & \dots & i_{s-1}\, i_{s+1} & \dots & i_r \\ & & i_s & & \end{bmatrix}.$$

Ma per la (12)

$$\frac{\partial X_{i_1\dots i_r}}{\partial x_h} - \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial X_{h i_1\dots i_{s-1} i_{s+1}\dots i_r}}{\partial x_{i_s}} = \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{bmatrix},$$

dunque aggiungendo alla (b) questa ultima relazione moltiplicata per $r-2$, abbiamo

$$2(r-1)\frac{\partial X_{i_1\dots i_r}}{\partial x_h} = (r-2)\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{bmatrix} - \sum_{s=1}^{r} \begin{bmatrix} h\, i_1 & \dots & i_{s-1}\, i_{s+1} & \dots & i_r \\ & & i_s & & \end{bmatrix}.$$

Questa è appunto la formola che si cercava: essa poi vale evidentemente anche per $r=2$.

Osserviamo ancora che i simboli (12) soddisfanno alla identità:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1}\, j \\ & h & \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1}\, k \\ & j & \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1}\, h \\ & k & \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1}\, h \\ & j & \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1}\, k \\ & h & \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1}\, j \\ & k & \end{bmatrix}.$$

avremo per le (11), (13)

$$
(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{Bmatrix} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} &= \sum_{j_1 \dots j_r} \begin{Bmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ & k & \end{Bmatrix}' \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial y_{j_r}}{\partial x_{i_r}} \\ & \quad - 2 \sum_{j_1 \dots j_r} \mathfrak{J}'_{k, j_r} Y_{j_1 \dots j_r} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{r-1} \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}_{yx} . \end{aligned} \right.
$$

Le espressioni $\begin{Bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{Bmatrix}$ sono dunque forme differenziali di primo ordine e di grado $(n-1)(r-2)$ che diremo i *simboli ad* $r+1$ *indici di seconda specie* relativi alla $X^{(r)}$, per distinguerli da quelli precedentemente considerati, che potremo chiamare *simboli ad* $r+1$ *indici di prima specie.*

I simboli di seconda specie ora definiti per le forme differenziali quadratiche ($r=2$) non differiscono che per un fattore numerico dagli ordinari simboli a tre indici di seconda specie di CHRISTOFFEL.

Dalla prima delle (14), per l'ultima delle (11), ricaviamo subito

$$
\mathfrak{J} \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & h & \end{bmatrix} = \sum_{1}^{n} X^{(r-2)}_{h,\sigma} \begin{Bmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ & \sigma & \end{Bmatrix} .
$$

L'invariante I che figura nella espressione delle forme $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_{i,h}$ è un invariante algebrico non assoluto qualunque della $X^{(r)}$: è chiaro quindi che le forme differenziali aventi più invarianti algebrici avranno anche più serie di simboli di seconda specie. Così la forma differenziale binaria biquadratica

$$
X^{(4)} = a^4_{dx} = b^4_{dx} = \cdots
$$

ha i due invarianti algebrici

$$
i = (ab)^4; \qquad j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2;
$$

tutti i simboli di seconda specie ad essa relativi si hanno prendendo

$$
\mathfrak{J} = \frac{H}{\varphi(i^3, j^2)}, \qquad \mathfrak{J}_{i,h} = \frac{H_{i,h}}{\varphi(i^3, j^2)},
$$

essendo $\varphi(i^3, j^2)$ una funzione omogenea qualunque degli argomenti i^3, j^2 col grado $\frac{1}{6}$ di omogeneità. In modo analogo potremo avere il valore delle forme $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_{i,h}$ da porsi nella espressione generale dei simboli di seconda specie relativi ad una forma differenziale qualunque, quando conosceremo tutti i suoi invarianti algebrici. Le forme differenziali cubiche binarie avendo (come le forme differenziali quadratiche) un solo invariante algebrico, hanno anche una sola serie di simboli di seconda specie.

§ 4. — Forme derivate.

Siano $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_{i,h}$, $\begin{Bmatrix} i_1 \dots i_r \\ h \end{Bmatrix}$ le forme differenziali definite nel paragrafo precedente relative alla forma differenziale $X^{(r)}$ e denotiamo al solito con $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}'_{i,h}$, $\begin{Bmatrix} i_1 \dots i_r \\ h \end{Bmatrix}'$ le stesse forme relative alla forma $Y^{(r)}$ trasformata della $X^{(r)}$. Contemporaneamente alla $X^{(r)}$ consideriamo ora la forma differenziale $X^{(s)}$ e supponiamo che la sostituzione (1) che trasforma la $X^{(r)}$ nella $Y^{(r)}$, trasformi la $X^{(s)}$ nella $Y^{(s)}$. Costruiamo poi la forma differenziale $\Omega^{(s'_r)}$ di grado

$$s'_r = n(r-2) + s + 1,$$

definita dalla relazione

$$(16)\quad \begin{cases} \Omega^{(s'_r)} \equiv 2\dbinom{r}{2}\mathfrak{J}\displaystyle\sum_{i_1\dots i_{s+1}} \frac{\partial X_{i_1\dots i_s}}{\partial x_{i_{s+1}}}\, dx_{i_1}\dots dx_{i_{s+1}} \\ \qquad\qquad + s\cdot\displaystyle\sum_{i_1\dots i_r}\sum_q X_q^{(s-1)}\begin{Bmatrix} i_1 \dots i_r \\ q \end{Bmatrix} dx_{i_1}\dots dx_{i_r}. \end{cases}$$

Proponiamoci di dimostrare che $\Omega^{(s'_r)}$ è un *covariante simultaneo* delle forme $X^{(r)}$, $X^{(s)}$.

Infatti si ha subito

$$\mathfrak{J}\sum_{i_1\dots i_{s+1}} \frac{\partial X_{i_1\dots i_s}}{\partial x_{i_{s+1}}}\, dx_{i_1}\dots dx_{i_{s+1}} = \mathfrak{J}'\Bigg\{\sum_{h_1\dots h_{s+1}} \frac{\partial Y_{h_1\dots h_s}}{\partial y_{h_{s+1}}}\, dy_{h_1}\dots dy_{h_{s+1}}$$
$$+\sum_{h_1\dots h_s} Y_{h_1\dots h_s}\sum_{\alpha=1}^{s} dy_{h_1}\dots dy_{h_{\alpha-1}}\, dy_{h_{\alpha+1}}\dots dy_{h_s}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_{h_\alpha}}{\partial x_i\partial x_j}\, dx_i\, dx_j\Bigg\}$$

ma, qualunque sia α, si ha

$$\sum_{h_1\dots h_s} Y_{h_1\dots h_s}\, dy_{h_1}\dots dy_{h_{\alpha-1}}\, dy_{h_{\alpha+1}}\dots dy_{h_s}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_{h_\alpha}}{\partial x_i\, d x_j}\, dx_i\, dx_j$$
$$= \sum_p Y_p^{(s-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i\partial x_j}\, dx_i\, dx_j,$$

dunque

$$(16')\quad \begin{cases} \mathfrak{J}\displaystyle\sum_{i_1\dots i_{s+1}} \frac{\partial X_{i_1\dots i_s}}{\partial x_{i_{s+1}}}\, dx_{i_1}\dots dx_{i_{s+1}} = \mathfrak{J}'\Bigg\{\sum_{h_1\dots h_{s+1}} \frac{\partial Y_{h_1\dots h_s}}{\partial y_{h_{s+1}}}\, dy_{h_1}\dots dy_{h_{s+1}} \\ \qquad\qquad + s\displaystyle\sum_p Y_p^{(s-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i\partial x_j}\, dx_i\, dx_j\Bigg\}. \end{cases}$$

Abbiamo ancora

$$\sum_{i_1\ldots i_r}\sum_q X_q^{(s-1)}\begin{Bmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ & q & \end{Bmatrix} dx_{i_1}\ldots dx_{i_r}$$

$$=\sum_{i_1\ldots i_r}\sum_{p,q} Y_p^{(s-1)}\frac{\partial y_p}{\partial x_q}\begin{Bmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ & q & \end{Bmatrix} dx_{i_1}\ldots dx_{i_r}$$

e, per la (15) del paragrafo precedente,

$$(16'')\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i_1\ldots i_r}\sum_q X_q^{(s-1)}\begin{Bmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ & q & \end{Bmatrix} dx_{i_1}\ldots dx_{i_r} \\ =\; &\sum_{h_1\ldots h_r}\sum_p Y_p^{(s-1)}\begin{Bmatrix} h_1 & \ldots & h_r \\ & p & \end{Bmatrix}' dy_{h_1}\ldots dy_{h_r} \\ -\,2 &\sum_{h_1\ldots h_r}\sum_p Y_p^{(s-1)}\mathfrak{B}'_{p,h_r}Y_{h_1\ldots h_r}\sum_{i_1\ldots i_r}\begin{pmatrix} h_1 & \ldots & h_{r-1} \\ i_1 & \ldots & i_r \end{pmatrix}_{yx} dx_{i_1}\ldots dx_{i_r}. \end{aligned}\right.$$

Per vedere come può trasformarsi il secondo termine del secondo membro di questa relazione rammentiamo *) che il simbolo

$$\begin{pmatrix} h_1 & \ldots & h_{r-1} \\ i_1 & \ldots & i_r \end{pmatrix}_{yx}$$

è la somma di $\begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix}$ termini aventi ciascuno la espressione

$$(a)\quad \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial y_{h_{\sigma-1}}}{\partial x_{i_{\sigma-1}}}\frac{\partial^2 y_{h_\sigma}}{\partial x_{i_\sigma}\partial x_{i_\varepsilon}}\frac{\partial y_{h_{\sigma+1}}}{\partial x_{i_{\sigma+1}}}\cdots\frac{\partial y_{h_{\varepsilon-1}}}{\partial x_{i_{\varepsilon-1}}}\frac{\partial y_{h_\varepsilon}}{\partial x_{i_{\varepsilon+1}}}\cdots\frac{\partial y_{h_{r-1}}}{\partial x_{i_r}}:\ \begin{pmatrix} \sigma=1,\ldots r-1 \\ \varepsilon=\sigma+1,\ldots r \end{pmatrix}$$

ed ognuno dei termini (a) porta, per l'ultima delle (11), nel secondo membro della (16″) il termine

$$-2\sum_p Y_p^{(s-1)}\sum_{h_1\ldots h_r}\mathfrak{B}'_{ph_r}Y_{h_1\ldots h_r}dy_{h_1}\ldots dy_{h_{\sigma-1}}dy_{h_{\sigma+1}}\ldots dy_{h_{r-1}}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_{h_\sigma}}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j$$

$$=-2\sum_p Y_p^{(s-1)}\sum_{h,i,j}\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j\sum_k \mathfrak{B}'_{p,k}Y_{h,k}^{(r-2)}$$

$$=-2\mathfrak{B}'\sum_p Y_p^{(s-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j.$$

*) La espressione del detto simbolo trovasi a pag. 289 della mia Nota: *I simboli di* CHRISTOFFEL, etc. [Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XVII (1903), pp. 287-296].

Segue da ciò che

$$
(16''') \quad \begin{cases} \sum\limits_{i_1 \dots i_r} \sum\limits_{q} X_q^{(s-1)} \left\{ \begin{matrix} i_1 & \dots & i_r \\ & q & \end{matrix} \right\} dx_{i_1} \dots dx_{i_r} \\ = \sum\limits_{h_1 \dots h_r} \sum\limits_{p} Y_p^{(s-1)} \left\{ \begin{matrix} h_1 & \dots & h_r \\ & p & \end{matrix} \right\}' dy_{h_1} \dots dy_{h_r} \\ - 2 \binom{r}{2} \mathfrak{H}' \sum\limits_{p} Y_p^{(s-1)} \sum\limits_{i,j} \dfrac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j . \end{cases}
$$

Quindi, se con $\Omega'^{(s'_r)}$ indichiamo la forma $\Omega^{(s'_r)}$ relativa alle forme $Y^{(r)}$, $Y^{(s)}$ trasformate rispettivamente delle $X^{(r)}$, $X^{(s)}$, avremo, per le (16'), (16'''),

$$
\Omega^{(s'_r)} = \Omega'^{(s'_r)} ,
$$

cioè la forma $\Omega^{(s'_r)}$ è appunto un covariante simultaneo delle forme $X^{(r)}$, $X^{(s)}$.

La precedente dimostrazione ci porta pure a concludere che, se

$$
(17) \quad \begin{cases} \Xi^{(s_r)} \equiv 2 \binom{r}{2} H \sum\limits_{i_1 \dots i_{s+1}} \dfrac{\partial X_{i_1 \dots i_s}}{\partial x_{i_{s+1}}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+1}} \\ + s \sum\limits_{i_1 \dots i_r} \sum\limits_{q, \sigma} X_q^{(s-1)} H_{\sigma, q} \left[\begin{matrix} i_1 & \dots & i_r \\ & \sigma & \end{matrix} \right] dx_{i_1} \dots dx_{i_r} , \end{cases}
$$

e se $\Xi'^{(s_r)}$ è la forma $\Xi^{(s_r)}$ relativa alle forme $Y^{(r)}$, $Y^{(s)}$, si avrà

$$
\Xi^{(s_r)} = D^2 . \Xi'^{(s_r)} .
$$

Si vede poi facilmente che il covariante $\Omega^{(s'_r)}$ precedentemente definito può scriversi sotto la seguente forma:

$$
(18) \quad \begin{cases} \Omega^{(s'_r)} \equiv 2 \binom{r}{2} \mathfrak{H} \sum\limits_{i_1 \dots i_{s+1}} \dfrac{\partial X_{i_1 \dots i_s}}{\partial x_{i_{s+1}}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+1}} \\ + \sum\limits_{i_1 \dots i_{r+s-1}} \sum\limits_{\tau=1}^{s} \sum\limits_{q=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} i_\tau i_{s+1} & \dots & i_{s+r-1} \\ & q & \end{matrix} \right\} X_{i_1 \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_s} dx_{i_1} \dots dx_{i_{r+s-1}} . \end{cases}
$$

Quando $r = 2$, si ha $s'_2 = s + 1$; in tal caso $\mathfrak{H} = 1$ ed $\mathfrak{H}_{i,h}$, $\left\{ \begin{matrix} i\,j \\ h \end{matrix} \right\}$ sono funzioni determinate dei coefficienti della $X^{(2)}$: allora, se

$$
\Omega^{(s+1)} \equiv \sum_{i_1 \dots i_{s+1}} \Omega_{i_1 \dots i_{s+1}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+1}}
$$

avendo le $\Omega_{i_1 \dots i_{s+1}}$ valori indipendenti dalla permutazione $i_1 \dots i_{s+1}$ degli indici, avremo

$$
(s + 1) \Omega_{i_1 \dots i_{s+1}} = \sum_{\sigma=1}^{s+1} (X_{i_1 \dots i_{\sigma-1} i_{\sigma+1} \dots i_{s+1} i_\sigma}),
$$

ove

$$(X_{i_1 \dots i_{\sigma-1} i_{\sigma+1} \dots i_{s+1} i_\sigma}) = 2 \frac{\partial X_{i_1 \dots i_{\sigma-1} i_{\sigma+1} \dots i_{s+1}}}{\partial x_{i_\sigma}}$$
$$+ \sum_{\tau=1}^{\sigma-1} \sum_{q=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} i_\tau \, i_\sigma \\ q \end{matrix} \right\} X_{i_1 \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_{\sigma-1} i_{\sigma+1} \dots i_{s+1}}$$
$$+ \sum_{\tau=\sigma+1}^{s+1} \sum_{q=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} i_\tau \, i_\sigma \\ q \end{matrix} \right\} X_{i_1 \dots i_{\sigma-1} i_{\sigma+1} \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_{s+1}} .$$

Perciò, quando $r = 2$, i coefficienti della forma $\Omega^{(s+1)}$ sono, a meno di un fattore numerico, la somma di $s + 1$ elementi del sistema detto, dal prof. RICCI *), *primo derivato* del sistema che consta dei coefficienti della forma $X^{(s)}$ rispetto alla *forma fondamentale* $X^{(2)}$. E noi, nel caso generale, diremo che la $\Omega^{(s'_r)}$ è la *prima forma derivata* della forma $X^{(s)}$ rispetto alla $X^{(r)}$ che chiameremo la *forma fondamentale.*

Possiamo analogamente formare la prima forma derivata $\Omega^{(s''_r)}$ della $\Omega^{(s'_r)}$ rispetto alla $X^{(\ )}$ ed avremo così nella $\Omega^{(s''_r)}$ la *seconda forma derivata* della $X^{(s)}$ rispetto alla $X^{(r)}$, che sarà un altro covariante simultaneo delle dette forme. Così proseguendo vediamo che le successive forme derivate della $X^{(s)}$ rispetto alla $X^{(r)}$ formano una classe di covarianti simultanei $\Omega^{(s_r)}$ delle forme $X^{(s)}$, $X^{(r)}$: la μ^{ma} forma derivata avrà il grado

$$\mu . n(r - 2) + s + \mu.$$

E, potendo la $X^{(r)}$ avere più serie di simboli di seconda specie, vi saranno in generale più forme derivate di uno stesso ordine della $X^{(s)}$ rispetto alla $X^{(r)}$.

Un'altra classe di covariante simultanei $\Omega^{(r_s)}$ delle forme $X^{(r)}$, $X^{(s)}$ otterremo evidentemente formando le successive forme derivate della $X^{(r)}$ rispetto alla $X^{(s)}$ considerata come forma fondamentale.

Altri covarianti avremo ancora nelle successive forme derivate di una qualunque $\Omega^{(r_s)}$ rispetto ad una qualunque $\Omega^{(s_r)}$ e di una qualunque $\Omega^{(\ _r)}$

---

*) La apparente diversità fra la formola sopra scritta e quella data da CHRISTOFFEL e riportata dal prof. RICCI per la determinazione degli elementi del primo sistema derivato di un sistema dato rispetto ad una $X^{(2)}$ fondamentale [Cfr. RICCI et LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Mathem. Annalen, Bd. LIV, 1901, pp. 125-201), formola (19) a pag. 138], dipende unicamente dal fatto che i simboli di 2ª specie a 3 indici che qui si presentano non coincidono esattamente coi simboli di 2ª specie di CHRISTOFFEL, ma sono il prodotto di questi pel fattore — 2.

rispetto ad un qualunque $\Omega^{(r_s)}$. Chiamiamo covarianti Ω tutti i covarianti fin qui ottenuti. Applicando ora il processo col quale dalle forme $X^{(r)}$, $X^{(s)}$ si sono avuti i covarianti Ω, a due qualunque di questi Ω, poi a due qualunque delle forme che così si ottengono e così proseguendo, si avranno ancora altri covarianti delle forme $X^{(r)}$, $X^{(s)}$, che chiameremo sempre *covarianti* Ω e che conterranno i coefficienti delle dette forme e le loro derivate dei successivi ordini.

Se r essendo qualunque, la $X^{(s)}$ è il differenziale primo di una funzione U delle x, la (18) diviene

$$(19)\quad \Omega=2\binom{r}{2}\mathfrak{S}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j+\sum_{i_1\ldots i_r}\sum_q \left\{\begin{matrix} i_1 \ldots i_r \\ q \end{matrix}\right\}\frac{\partial U}{\partial x_q}dx_{i_1}\ldots dx_{i_r}:$$

ottenendosi così una forma di grado $n(r-2)+2$ covariante alla $X^{(r)}$ e contenente le derivate prime e seconde di una funzione arbitraria U.

I coefficienti di detta forma, quando $r=2$, sono detti dal professore Ricci le *derivate seconde covarianti* della funzione U rispetto alla forma fondamentale $X^{(2)}$.

§ 5. — **Teoremi relativi alle forme derivate.**

Se $\Omega^{(r'_r)}$ è la prima forma derivata della forma fondamentale $X^{(r)}$, abbiamo per la (16)

$$\Omega^{(r'_r)}=2\binom{r}{2}\mathfrak{S}\sum_{i_1\ldots i_{r+1}}\frac{\partial X_{i_1\ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_{r+1}}$$
$$+r\sum_{i_1\ldots i_r}\sum_q X_q^{(r-1)}\left\{\begin{matrix} i_1 \ldots i_r \\ q \end{matrix}\right\}dx_{i_1}\ldots dx_{i_r},$$

ma $X_q^{(r+1)}=\sum_{i_{r+1}} X_{q,i_{r+1}}^{(r-2)}dx_{i_{r+1}}$, dunque, per le (11), (14),

$$(\alpha)\quad \sum_q X_q^{(r-1)}\left\{\begin{matrix} i_1 \ldots i_r \\ q \end{matrix}\right\}dx_{i_1}\ldots dx_{i_r}=\mathfrak{S}\sum_{i_{r+1}}\begin{bmatrix} i_1 \ldots i_r \\ i_{r+1} \end{bmatrix}dx_{i_{r+1}}.$$

Essendo poi

$$\sum_{i_1\ldots i_{r+1}}\frac{\partial X_{i_1\ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_{r+1}}=\sum_{i_1\ldots i_{r+1}}\frac{\partial X_{i_1\ldots i_{\sigma-1}i_{\sigma+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_\sigma}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_{r+1}}\ (\sigma=1,\ldots r)$$

si ha, per la (12),

$$(\beta)\quad \sum_{i_1\ldots i_{r+1}}\begin{bmatrix} i_1 \ldots i_r \\ i_{r+1} \end{bmatrix}dx_{i_1}\ldots dx_{i_{r+1}}=-(r-1)\sum_{i_1\ldots i_{r+1}}\frac{\partial X_{i_1\ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_{r+1}}.$$

Per le (α), (β) segue ora che $\Omega^{(r'r)} \equiv 0$, cioè: *la prima forma derivata della forma fondamentale è identicamente nulla.*

Dalla (18), si deduce pure che *la prima forma derivata, rispetto ad una forma fondamentale qualunque, della forma somma di più forme di uguale grado è uguale alla forma somma delle prime forme derivate delle singole forme rispetto alla stessa forma fondamentale.* Lo stesso teorema vale pure per le forme derivate di qualsiasi ordine.

Abbiansi ora le due forme $X^{(s)}$, $X^{(t)}$ e consideriamo la forma

$$Z^{(s+t)} \equiv X^{(s)}.X^{(t)} \equiv \sum_{i_1 \dots i_{s+t}} X_{i_1 \dots i_s} X_{i_{s+1} \dots i_{s+t}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+t}}.$$

Detta Ω la prima forma derivata della forma $Z^{(s+t)}$ rispetto alla forma fondamentale $X^{(r)}$, avremo, per la (18),

$$\Omega = 2\binom{r}{2}\mathfrak{J} \sum_{i_1 \dots i_{s+t+1}} \frac{\partial (X_{i_1 \dots i_s} X_{i_{s+1} \dots i_{s+t}})}{\partial x_{i_{s+t+1}}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+t+1}}$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_{r+s+t-1}} \sum_{\tau=1}^{s} \sum_{q=1}^{n} \begin{Bmatrix} i_\tau i_{s+t+1} \dots i_{s+t+r-1} \\ q \end{Bmatrix} X_{i_1 \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_s} X_{i_{s+1} \dots i_{s+t}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+t+r-1}}$$

$$+ \sum_{i_1 \dots i_{r+s+t-1}} \sum_{\tau=s+1}^{s+t} \sum_{q=1}^{n} \begin{Bmatrix} i_\tau i_{s+t+1} \dots i_{s+t+r-1} \\ q \end{Bmatrix} X_{i_1 \dots i_s} X_{i_{s+1} \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_{s+t}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+t+r-1}}.$$

Ora, detti ψ_1, ψ_2, ψ_3 rispettivamente il primo, secondo, terzo termine del secondo membro di questa relazione, si ha evidentemente

$$\psi_1 = 2\binom{r}{2}\mathfrak{J}\left\{X^{(s)} \sum_{i_1 \dots i_{t+1}} \frac{\partial X_{i_1 \dots i_t}}{\partial x_{i_{t+1}}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{t+1}} + X^{(t)} \sum_{i_1 \dots i_{s+1}} \frac{\partial X_{i_1 \dots i_s}}{\partial x_{i_{s+1}}} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+1}}\right\},$$

$$\psi_2 = X^{(t)} \sum_{i_1 \dots i_{s+r-1}} \sum_{\tau=1}^{s} \sum_{q=1}^{n} \begin{Bmatrix} i_\tau i_{s+1} \dots i_{s+r-1} \\ q \end{Bmatrix} X_{i_1 \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_s} dx_{i_1} \dots dx_{i_{s+r-1}},$$

$$\psi_3 = X^{(s)} \sum_{i_1 \dots i_{t+r-1}} \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{q=1}^{n} \begin{Bmatrix} i_\tau i_{t+1} \dots i_{t+r-1} \\ q \end{Bmatrix} X_{i_1 \dots i_{\tau-1} q i_{\tau+1} \dots i_t} dx_{i_1} \dots dx_{i_{t+r-1}};$$

quindi, se $\Omega^{(s,r)}$, $\Omega^{(t,r)}$ sono le prime forme derivate rispettivamente delle forme $X^{(s)}$, $X^{(t)}$ rispetto alla forma fondamentale $X^{(r)}$, avremo

$$\Omega = X^{(s)}\Omega^{(t,r)} + X^{(t)}.\Omega^{(s,r)};$$

cioè: *la prima forma derivata della forma prodotto di due altre forme rispetto ad una forma fondamentale qualunque è uguale alla forma somma delle forme prodotti di ciascuna delle due forme date per la prima forma derivata dell'altra rispetto alla stessa forma fondamentale.*

La proprietà analoga sussiste fra la prima forma derivata di una

forma prodotto di un numero qualunque di forme e queste singole forme e le loro prime loro forme derivate quando siano tutte prese rispetto ad una stessa forma fondamentale.

Ancora, se ψ è una funzione qualunque delle variabili e le forme $X^{(s)}$, $T^{(s)}$ sono legate dalla relazione

$$T^{(s)} = \psi \, . \, X^{(s)},$$

denotando con $\Omega_1^{(s_r)}$, $\Omega^{(s_r)}$ rispettivamente le prime forme derivate di $T^{(s)}$, $X^{(s)}$ rispetto alla $X^{(r)}$, avremo

$$\Omega_1^{(s_r)} = \psi \, . \, \Omega^{(s_r)} + 2 \binom{r}{2} \mathfrak{H} X^{s)} d\psi.$$

Consideriamo infine tre forme differenziali $X^{(r)}$, $X^{(s)}$, $X^{(t)}$ e formiamo le prime forme derivate $\Omega^{(r_s)}$, $\Omega^{(r_t)}$ della $X^{(r)}$ rispettivamente rispetto alla $X^{(s)}$ ed alla $X^{(t)}$. Costruiamo poi la prima forma derivata Γ_1 della $\Omega^{(r_s)}$ rispetto alla $X^{(t)}$ e la prima forma derivata Γ_2 della $\Omega^{(r_t)}$ rispetto alla $X^{(s)}$. Le forme Γ_1, Γ_2 hanno lo stesso grado

$$n(s-2) + n(t-2) + r + 2,$$

però sono diverse fra loro. Per convincersene basta notare che mentre la forma Γ_1 conterrà le prime derivate dei coefficienti della $X^{(t)}$ e le seconde derivate dei coefficienti delle $X^{(r)}$, $X^{(s)}$, la Γ_2 conterrà le prime derivate dei coefficienti della $X^{(s)}$ e le seconde derivate dei coefficienti delle $X^{(r)}$, $X^{(t)}$.

§ 6. — Invarianti differenziali.

I covarianti Ω del § 4 conducono subito alla determinazione di tanti invarianti differenziali di ordine dato di una forma differenziale qualunque.

Abbiansi infatti la forma $X^{(r)}$ e siano $X^{(s_1)}$, $X^{(s_2)}$, ... i suoi covarianti algebrici assoluti; determiniamo poi i covarianti Ω relativi al sistema che consta delle forme $X^{(r)}$, $X^{(s_1)}$, $X^{(s_2)}$, ... considerando prima le forme $X^{(r)}$, $X^{(s_1)}$ poi le altre $X^{(r)}$, $X^{(s_2)}$ e così via. È chiaro che si avranno tanti invarianti differenziali di ordine μ determinando tutti gli invarianti algebrici del sistema formato delle $X^{(r)}$, $X^{(s_1)}$, $X^{(s_2)}$, ... e di tutti i covarianti Ω precedentemente trovati che contengono le varie derivate dei coefficienti fino all'ordine μ.

Per la ricerca degli invarianti differenziali alle forme Ω, contenenti solo le derivate prime dei coefficienti, potremo sostituire le forme Ξ (§ 4).

La forma differenziale cubica binaria

$$X^{(3)} = a_{dx}^3 = b_{dx}^{(3)} = \cdots$$

ha l'unico invariante algebrico

$$R \equiv (a\,b)^2 (c\,d)^2 (a\,c)(b\,d)$$

e due covarianti algebrici assoluti

$$\Delta^{(2)} \equiv \frac{(a\,b)^2 a_{dx} b_{dx}}{R^{\frac{1}{3}}}, \qquad Q^{(3)} \equiv \frac{(a\,b)^2 (b\,c)\, a_{dx} c_{dx}^2}{\sqrt{R}}.$$

Colle forme $X^{(3)}$, $\Delta^{(2)}$, $Q^{(3)}$ possiamo ora costruire sei covarianti Ω contenenti le derivate prime della $X^{(3)}$; di questi, due saranno di 4° grado (le prime forme derivate di $X^{(3)}$ e $Q^{(3)}$ rispetto a $\Delta^{(2)}$), due di 5° grado (la prima forma derivata di $\Delta^{(2)}$ rispetto ad $X^{(3)}$ e quella di $\Delta^{(2)}$ rispetto a $Q^{(3)}$) e due di 6° grado (la prima forma derivata di $Q^{(3)}$ rispetto ad $X^{(3)}$ e quella di $X^{(3)}$ rispetto a $Q^{(3)}$). Gli invarianti algebrici del sistema che consta delle $X^{(3)}$, $\Delta^{(2)}$, $Q^{(3)}$ e di quelli dei sei covarianti Ω che sono indipendenti fra loro saranno invarianti differenziali di primo ordine della $X^{(3)}$.

Analogamente potremo procedere per la determinazione di invarianti differenziali di ordine qualunque μ di un sistema di un numero qualunque di forme; perciò cercheremo gli invarianti algebrici del sistema che consta delle forme date, dei loro covarianti algebrici e dei covarianti Ω contenenti le derivate dei coefficienti fino all'ordine μ.

In particolare gli invarianti algebrici del sistema che consta della $X^{(r)}$ e della Ω definita dalla (19) del § 4 saranno tanti *parametri differenziali secondi* di U rispetto alla forma $X^{(r)}$.

Milano, ottobre 1904.

LUIGI SINIGALLIA.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES.

MÉMOIRE

de M. R. de **Montessus de Ballore**, à Lille.

Adunanza dell'11 dicembre 1904.

INTRODUCTION.

1. Le mode de représentation des fonctions qui se présente le premier à l'esprit est le développement en séries de puissances. Vient ensuite la représentation par séries de polynômes, séries trigonométriques et, en général, par séries de fonctions quelconques.

La représentation par séries de polynômes est un cas particulier de la représentation par *fractions continues* ou par *fractions rationnelles déterminées*.

EULER *) a le premier développé une fonction en *fraction continue*. LAGRANGE **) puis les mathématiciens du XIX^e^ siècle ont ensuite fait quelques pas dans cette voie difficile.

Une des tentatives les plus intéressantes a été celle de LAGUERRE ***), qui s'est efforcé de développer en fractions continues les fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle:

$$P(z) \times \frac{d.Z(z)}{dz} = Q(z) \times Z(z) + \Pi(z),$$

où P, Q, Π sont des polynômes quelconques en z.

LAGUERRE n'a donné que des indications générales sur la manière de traiter le problème; il n'a étudié complètement que certains cas très

*) EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, pp. 368-373.

**) LAGRANGE, *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral* (*Œuvres complètes*, t. IV, pp. 301-332).

***) LAGUERRE, *Œuvres*, passim.

particuliers. Cependant sa méthode donne effectivement, comme je le montrerai, le développement en fractions continues des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation :

$$(1) \qquad (az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

où a, b, c, d, p, q sont des constantes quelconques et $\Pi(z)$ un polynôme quelconque en z.

Tous les développements donnés par LAGUERRE sont des cas particuliers de celui-ci.

2. Les fractions continues algébriques sont de formes très diverses et M. PADÉ *) s'est proposé d'en faire la classification. Il a publié à ce sujet un mémoire remarquable.

3. *Développer une fonction en fraction continue, classer les fractions continues* sont deux problèmes importants, mais qui n'épuisent pas le sujet. *Non moins importante est la question de convergence* et HALPHEN **), STIELTJES ***) ont montré quels beaux résultats cette étude pouvait donner.

4. *Le principal objet de ce Mémoire est l'étude de la convergence.*

Suivant la classification de M. PADÉ, que je rappellerai brièvement, je partage les fractions continues, qu'il appelle simples, en trois classes.

Je fixe complètement les conditions de convergence des fractions continues de la *première classe*. Ces conditions dépendent de la nature de la fonction développée en fractions continues. *Les développements de cette classe convergent dans des cercles pouvant comprendre à leur intérieur les pôles de la fonction, mais limités aux points singuliers essentiels de la fonction.*

Je détermine ensuite les conditions de convergence d'une classe très étendue de fractions continues de la seconde classe. Les termes de trois réduites consécutives

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}, \quad \frac{U_n}{V_n}, \quad \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}$$

d'une fraction continue quelconque de cette classe — et en général de toute fraction continue algébrique — satisfont en effet à une même loi de

*) PADÉ, *Thèse.*

**) HALPHEN, *Traité des fonctions eliptiques,* tome II, p. 575.

***) STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tome VIII (1894), J: 1-122].

récurrence:

$$A.U_{n+1} + B.U_n + C.U_{n-1} = 0,$$
$$A.V_{n+1} + B.V_n + C.V_{n-1} = 0,$$

où A, B, C sont des polynômes en z fonctions du rang n des réduites.

Dans le cas très étendu où A, B, C, sont des polynômes en z et n [cas qui comprend les développements de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation (1) et beaucoup d'autres infiniment plus généraux] je montre que *la fraction continue représente* — sauf cas particuliers — *la fonction dans tout le plan de la variable z, à l'exception des points situés sur des coupures qui s'introduisent d'elles-mêmes dans les calculs.*

J'étends même les caractères de convergence des fractions continues de cette nature à des fractions continues qui ne rentrent pas dans la classification de M. PADÉ, mais qui ont été rencontrées cependant par divers mathématiciens, LAGUERRE par exemple.

Je montre enfin que *les développements de cette dernière classe se rapportant à certaines fonctions possédant deux points singuliers qui peuvent être des points critiques algébriques ou logarithmiques convergent dans tout le plan de la variable, sauf sur la coupure rectiligne joignant ces deux points.*

Dans une *troisième partie,* j'étudie les fractions continues dues à GAUSS et à LAGRANGE et je montre qu'ordinairement elles représentent les fonctions dans tout le plan, sauf sur les coupures nécessaires à rendre ces fonctions uniformes.

Quelques-uns des résultats énoncés dans ce Mémoire ont été publiés déjà dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* *) et dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* **).

PRÉLIMINAIRES.

I. — Le tableau des fractions approchées.

5. Soit $Z(z)$ une fonction développable dans le voisinage de la valeur zéro de la variable z en une série procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes de cette variable et ne s'annulant pas pour $z = 0$:

$$Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad a_0 \neq 0.$$

*) Tomes: CXXXIV (1er sem. 1902), pp. 1489-1491; CXXXVIII (1er sem. 1904), pp. 471-474; CXXXIX (2e sem. 1904), pp. 846-848.

**) Tome XXX (1902), pp. 28-36.

Soit maintenant (p, q) un couple de nombres égaux ou inégaux, pris dans la suite 0, 1, 2, 3, ... Considérons l'ensemble des fractions rationnelles *irréductibles* dont le numérateur est au plus de degré p et le dénominateur au plus de degré q. Si l'on se propose de déterminer, parmi les fractions de cet ensemble, celles qui *représentent le mieux* la fonction $Z(z)$ dans le voisinage de la valeur zéro de z, c'est-à-dire celles qui, z étant infiniment petit, diffèrent de la fonction d'une quantité dont l'ordre infinitésimal soit supérieur ou au moins égal à celui que l'on obtient en employant une quelconque des autres fractions, on arrive à la proposition que voici, démontrée par M. Padé :

Parmi toutes les fractions rationnelles irréductibles dont les termes ont des degrés égaux au plus à p pour le numérateur, à q pour le dénominateur $(p \neq q)$ il en est une $\frac{U}{V}$ qui donne une approximation dont l'ordre est supérieur à celui de l'approximation fournie par une quelconque des autres fractions.

Ainsi, à chaque couple (p, q) de nombres de la suite 0, 1, 2, 3, ... correspond *une fraction rationnelle approchée* pour la fonction $Z(z)$; ces fractions forment donc un ensemble complètement défini et se présentent comme les termes d'une suite à double entrée ; pour cette raison, nous les écrirons, avec M. Padé, dans les cases d'un tableau rectangulaire, illimité à droite et en bas ; les fractions d'une même file horizontale correspondront à une même valeur de q, celles d'une même file verticale à une même valeur de p. Dans la première file horizontale figurent ainsi les polynômes approchés successifs déduits de la série de puissances entières qui représente $Z(z)$:

$\frac{U_0^0}{V_0^0}$	$\frac{U_0^1}{V_1^0}$	$\frac{U_0^2}{V_2^0}$	$\frac{U_0^3}{V_3^0}$	...	$\frac{U_0^p}{V_p^0}$
$\frac{U_1^0}{V_0^1}$	$\frac{U_1^1}{V_1^1}$	$\frac{U_1^2}{V_2^1}$	$\frac{U_1^3}{V_3^1}$	...	$\frac{U_1^p}{V_p^1}$
$\frac{U_2^0}{V_0^2}$	$\frac{U_2^1}{V_1^2}$	$\frac{U_2^2}{V_2^2}$	$\frac{U_2^3}{V_3^2}$	...	$\frac{U_2^p}{V_p^2}$
...	...	...	...	...	...
$\frac{U_q^0}{V_0^q}$	$\frac{U_q^1}{V_1^q}$	$\frac{U_q^2}{V_2^q}$	$\frac{U_q^3}{V_3^q}$	...	$\frac{U_q^p}{V_p^q}$

comme on le voit, les indices supérieurs marquent les degrés en z; dans la fraction $\frac{U_q^p}{V_p^q}$, U_q^p est de degré p et V_p^q est de degré q.

On peut déterminer comme il suit la fraction $\frac{U_q^p}{V_p^q}$.

Si

$$U_q^p = a_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_p z^p,$$

$$V_p^q = 1 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_q z^q,$$

on écrira

$$\frac{U_q^p}{V_p^q} = \frac{a_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_p z^p}{1 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_q z^q}$$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p+q} z^{p+q} + \lambda z^{p+q+1} + \cdots$$

ou

$$a_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_p z^p$$

$$= (1 + y_1 z + \cdots + y_q z^q)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+q-1} z^{p+q} + \lambda z^{p+q+1} + \cdots)$$

et on identifiera les coefficients de

$$z, \quad z^2, \quad z^3, \quad \ldots, \quad z^{p+q},$$

ce qui donnera un système de $p + q$ équations linéaires déterminant les inconnues

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_p, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_q.$$

II. — Les fractions continues déduites du tableau.

6. Aux fractions rationnelles du tableau correspondant à une fonction de la variable z, M. Padé fait correspondre comme il suit des fractions continues.

Il remarque que la plupart des fractions continues étudiées jusqu'à ce jour se réfèrent à 3 types principaux :

$$\mathfrak{A} = 1 + az + \cfrac{\alpha z}{1 + bz + \cfrac{\beta z}{1 + cz + \cfrac{\gamma z}{1 + \ddots}}},$$

$$\mathfrak{B} = 1 + \cfrac{\alpha z}{1 + \cfrac{\beta z}{1 + \cfrac{\gamma z}{1 + \ddots}}},$$

$$\mathfrak{C} = 1 + az + \cfrac{\alpha z^2}{1 + bz + \cfrac{\beta z^2}{1 + cz + \cfrac{\gamma z^2}{1 + \cdots}}},$$

où les quantités a, α, b, β, ... sont des constantes.

Puis M. Padé classe d'abord les fractions continues en deux groupes définis par leurs formes

$$(\text{I}^{\text{er}}\ \text{Groupe})\ a_1 + \cfrac{\alpha_1}{a_2 + \cfrac{\alpha_2}{a_3 + \cfrac{\alpha_4}{\ddots}}} \qquad (\text{II}^{\text{ème}}\ \text{Groupe})\ \cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \cdots}}}$$

et après avoir rappelé qu'une réduite est la fraction rationnelle obtenue en réduisant une fraction continue limitée au quotient de deux polynômes entiers, il montre que les termes de la réduite $\frac{U_i}{V_i}$:

$$\frac{U_i}{V_i} = a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{\ddots + \cfrac{\alpha_i}{a_i}}} \qquad (\text{I}^{\text{er}}\ \text{groupe}),$$

$$\frac{U_i}{V_i} = \cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{\ddots + \cfrac{\alpha_i}{a_i}}} \qquad (\text{II}^{\text{ème}}\ \text{groupe})$$

sont définis par l'unique loi de récurrence

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i \\ \alpha_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} = V_i \end{array} \right. \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots)$$

avec

$$(2) \left\{ \begin{array}{llll} U_1 = a_1, & V_1 = 1, & U_2 = a_1 a_2 + \alpha_2, & V_2 = a_2\ (\text{I}^{\text{er}}\ \text{groupe}) \\ U_1 = \alpha_1, & V_1 = \alpha_1, & U_2 = \alpha_1 \alpha_2, & V_2 = a_1 a_2 + \alpha_2\ (\text{II}^{\text{ème}}\ \text{groupe}), \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit les formules:

$$(\text{I}^{\text{er}}\ \text{groupe}) \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{U_1}{V_1}, \quad \alpha_2 = -\dfrac{U_1 V_2 - U_2 V_1}{V_1}, \quad \alpha_i = -\dfrac{U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}} \\ \qquad a_2 = V_2, \qquad a_i = \dfrac{U_{i-2} V_i - U_i V_{i-2}}{U_{i-2} V_{i-1} - U_{i-1} V_{i-2}} \end{array} \right\}_{i=3,4,\ldots}$$

$$\text{II}^{\text{ème}}\ \text{groupe})\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = U_1, & \alpha_2 = \dfrac{U_1V_2 - U_2V_1}{U_1}, & \alpha_i = -\dfrac{U_{i-1}V_i - U_iV_{i-1}}{U_{i-2}V_{i-1} - U_{i-1}V_{i-2}} \\ a_1 = V_1, & a_2 = \dfrac{U_2}{V_1}, & a_i = \dfrac{U_{i-2}V_i - U_iV_{i-2}}{U_{i-2}V_{i-1} - U_{i-1}V_{i-2}} \end{array}\right\}_{i=3,4,\ldots}.$$

Aux suites de polynômes U, V définies par les relations (1), (2) correspond donc toujours une fraction continue; même, en effectuant certaines multiplications sur les éléments de la fraction continue, on ramène celle-ci à une fraction continue dont les éléments sont des polynômes.

M. Padé se borne alors à la considération des *fractions continues simples*, c'est-à-dire aux fractions continues dont les éléments sont de la forme

$$\alpha_1 = A_1, \qquad \alpha_i = A_i z^p, \qquad a_i = B_0 + B_1 z + \cdots + B_q z^q,$$
$$(A_1, \ldots, A_i, B_0, \ldots, B_q \text{ constantes}),$$

ce qui nécessite que *les polynômes* U, V, qui en constituent les réduites, *aient tous un terme constant non nul et que les quantités* $U_iV_{i+1} - U_{i+1}V_i$ *se réduisent toutes à un monôme entier en* z, *ayant un coefficient différent de zéro et un degré croissant quand* i *augmente.*

7. Il suit de ces propriétés qu'il *ne peut y avoir qu'une seule fraction continue simple, telle que ses réduites successives soient respectivement égales à des fractions rationnelles irréductibles données*

$$\frac{U_0}{V_0}, \quad \frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \ldots$$

et ici se pose la question : *Comment doivent être choisies, dans le tableau des fractions distinctes, des fractions pour qu'elles soient les réduites d'une fraction continue simple ?*

Il faut que : 1° *la première fraction de la suite appartienne au bord du tableau ;* 2° *les carrés contenant deux fractions consécutives quelconques soient toujours contigus ;* 3° *une fraction quelconque de la suite soit toujours plus avancée dans le tableau que celle qui précède en ce sens que la somme des indices doit aller en croissant d'une fraction à l'autre.*

Ici, M. Padé revient à la considération des types $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et appelant *fractions continues régulières* les fractions continues *simples* dont, à l'exemple de celle-ci, tous les numérateurs partiels ont le même degré, ainsi que tous les dénominateurs partiels, avec exception permises pour les éléments :

(I^er^ Groupe) a_1, α_1,
(II^ème^ Groupe) α_1, a_2, α_2,

il montre qu'on peut choisir de 3 manières différentes, et 3 seulement, des fractions du tableau de manière à obtenir les réduites successives d'une fraction continue *régulière :*

1° *En prenant des fractions consécutives situées sur une ligne horizontale ou verticale, ce qui donne la forme* $\mathfrak{A}$.

2° *En prenant des fractions consécutives situées sur la première diagonale principale, c'est-à-dire faisant partie de la suite*

$$\frac{U_0^0}{V_0^0}, \quad \frac{U_1^1}{V_1^1}, \quad \frac{U_2^2}{V_2^2}, \quad \frac{U_3^3}{V_3^3}, \ldots$$

ou sur une parallèle à la diagonale principale, ce qui donne la forme $\mathfrak{C}$.

3° *En procédant comme il suit : quand on passe d'une fraction à la suivante, on doit se déplacer parallèlement à l'un des bords du tableau, si l'on passe encore à la suivante, on doit se déplacer parallèlement à l'autre bord, et ainsi de suite ; la forme générale du chemin est ainsi celle d'un escalier à degrés égaux ayant pour direction générale celle de la diagonale principale ; les deux premières fractions de la suite doivent appartenir à la première file horizontale ou à la première file verticale. On obtient ainsi la forme* $\mathfrak{B}$.

8. Conformément à cette classification, j'étudie en premier *lieu* les fractions continues qui correspondent à des suites de fractions rationnelles consécutives toutes sur une même ligne horizontale ou verticale du tableau (forme $\mathfrak{A}$).

Les résultats obtenus pour les fractions de cette catégorie se basent sur la nature des singularités de la fonction génératrice $Z(z)$.

En second lieu, j'étudie les fractions continues qui correspondent à des suites de fractions rationnelles consécutives toutes sur une même diagonale principale (forme $\mathfrak{C}$) et j'étends les résultats à des fractions de même nature que M. PADÉ n'a pas considérées.

Ici, c'est par l'étude directe des relations de récurrence liant les réduites que j'arrive à fixer les conditions de convergence.

PREMIÈRE PARTIE.

LES FRACTIONS CONTINUES DE LA FORME $\mathfrak{A}$.

CHAPITRE I.

Les réduites sont constituées par les fractions rationnelles

$$\frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \quad \frac{U_p^2}{V_2^p}, \ldots, \quad \frac{U_p^m}{V_m^p}$$

de la ligne horizontale de rang p du Tableau des fractions approchées.

9. La fraction rationnelle

$$\frac{U_p^m}{V_m^p} = \frac{S_0 + C_{1,m}^p z + C_{2,m}^p z^2 + \cdots + C_{m-1,m}^p z^{m-1} + C_{m,m}^p z^m}{1 - B_{1,p}^m z + B_{2,p}^m z^2 - \cdots + (-1)^i B_{i,p}^m z^i + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m z^p}$$

est définie par cette condition: que les $m+p+1$ premiers termes de son développement suivant les puissances entières et positives de la variable z soient identiques aux $m+p+1$ premiers termes du développement en série

$$(S) \quad S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots + S_{m+p} z^{m+p} + S_{m+p+1} z^{m+p+1} + \cdots$$

de la fonction $Z(z)$ qui correspond au Tableau des fractions $\dfrac{U}{V}$.

Identifions les termes du produit

$$V_m^p \times (S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots)$$

aux termes de U_p^m. Il vient

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{ll} C_{1,m}^p & = S_1 - B_{1,p}^m S_0, \\ C_{2,m}^p & = S_2 - B_{1,p}^m S_1 + B_{2,p}^m S_0, \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ C_{p,m}^p & = S_p - B_{1,p}^m S_{p-1} + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m S_0, \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ C_{p+k,m}^p & = S_{p+k} - B_{1,p}^m S_{p+k-1} + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m S_k, \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ C_{m,m}^p & = S_m - B_{1,p}^m S_{m-1} + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m S_{m-p}, \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = S_{m+1} - B_{1,p}^m S_m + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m S_{m-p+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = S_{m+p} - B_{1,p}^m S_{m+p-1} + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^m S_m. \end{cases}$$

Je remarque qu'ici l'indice p est un entier positif *déterminé* au lieu que l'indice m varie de zéro à l'infini.

Or, M. HADAMARD *), à propos de recherches sur les séries, *a montré que, si les modules des pôles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ de la fonction représentée par la série $\sum_0^\infty S_n z^n$ *vérifient les inégalités*

$$(3)\quad |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \leqq \cdots \leqq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \cdots,$$

les coefficients $B_{i,p}^m$ *tendent, quand* m *croît indéfiniment, vers des limites* $B_{i,p}$, *telles que l'on ait*

$$V^p = \lim_{m=\infty} V_m^p = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_p}\right),$$

chaque pôle multiple devant être compté pour autant de pôles simples qu'il entre d'unités dans son degré de multiplicité.

Au contraire, si

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_p| = |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \cdots,$$

il se peut que les quantités $B_{i,p}^m$ *tendent vers des limites qui ne soient plus les fonctions symétriques des affixes des pôles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *et même ne tendent vers aucune limite.*

Il est donc à prévoir que, si les inégalités (3) *sont vérifiées, le cercle de convergence de la série*

$$(S')\qquad \frac{U_p^0}{V_0^p} + \left(\frac{U_p^1}{V_1^p} - \frac{U_p^0}{V_0^p}\right) + \left(\frac{U_p^2}{V_2^p} - \frac{U_p^1}{V_1^p}\right) + \cdots$$

a pour rayon $|\alpha_{p+1}|$.

10. En effet, posant

$$\begin{aligned} A_p^m = U_p^{n-1} V_n^p - U_p^n V_{n-1}^p = [S_0 + C_{1,n-1}^p z + \cdots + C_{n-1,n-1}^p z^{n-1}] \\ \times [1 - B_{1,p}^n z + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^n z^p] - [S_0 + C_{1,n}^p z + \cdots + C_{n,n}^p z^n] \\ \times [1 - B_{1,p}^{n-1} z + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^{n-1} z^p], \end{aligned}$$

la série (S') prend la forme

$$(S'')\qquad \frac{U_p^0}{V_0^p} - \frac{A_p^1}{V_0^p V_1^p} - \frac{A_p^2}{V_1^p V_2^p} - \cdots;$$

---

*) J. HADAMARD, *La série de* TAYLOR *et son prolongement analytique*, p. 41.

puis A_p^n se réduisant à un terme monôme *) et le terme en z^{n+p}, seul de son espèce, étant irréductible

$$A_p^n = (-1)^{p+1} C_{n,n}^p B_{p,p}^{n-1} z^{n+p}.$$

Calculons

$$C_{n,n}^p, \quad B_{p,p}^{n-1}.$$

Éliminant $B_{1,p}^m, B_{2,p}^m, \ldots, B_{p,p}^m$ entre les équations (2) et la dernière des équations (1), il vient

$$\begin{vmatrix} S_m - C_{m,m}^p & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m+p} & S_{m+p-1} & \ldots & S_m \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$C_{m,m}^p = \frac{\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m+p} & S_{m+p-1} & \ldots & S_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p+1} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m+p-1} & S_{m+p-2} & \ldots & S_m \end{vmatrix}}.$$

Quant à $B_{p,p}^m$, le système (2) nous donne semblablement

$$B_{p,p}^m = \pm \frac{\begin{vmatrix} S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+2} \\ S_{m+2} & S_{m+1} & \ldots & S_{m-p+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m+p} & S_{m+p-1} & \ldots & S_{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_m & S_{m-1} & \ldots & S_{m-p+1} \\ S_{m+1} & S_m & \ldots & S_{m-p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m+p-1} & S_{m+p-2} & \ldots & S_m \end{vmatrix}}$$

et on en conclut

---

*) On sait que si $\frac{U_N}{V_N}, \frac{U_N}{V_N}$ sont deux réduites consécutives du *tableau*, la différence $U_N P_P - U_P V_N$ se réduit à un terme monôme.

$$A_p^n = \pm \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n-1} & \dots & S_{n-p} \\ S_{n+1} & S_n & \dots & S_{n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n+p} & S_{n+p-1} & \dots & S_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{n-1} & S_{n-2} & \dots & S_{n-p} \\ S_n & S_{n-1} & \dots & S_{n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n+p-2} & S_{n+p-3} & \dots & S_{n-1} \end{vmatrix}};$$

posant $n - p = k$, il s'agit donc de déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \pm \frac{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \dots & S_{k+p} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \dots & S_{k+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k+p} & S_{k+p+1} & \dots & S_{k+2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \dots & S_{k+p-1} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \dots & S_{k+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k+p-1} & S_{k+p-2} & \dots & S_{k+2p-2} \end{vmatrix}} \times \frac{1}{V_{p+k-1}^p V_{p+k}} z^{2p+k}$$

ou, plus simplement, le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \pm \frac{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \dots & S_{k+p} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \dots & S_{k+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k+p} & S_{k+p+1} & \dots & S_{k+2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & S_{k+1} & \dots & S_{k+p-1} \\ S_{k+1} & S_{k+2} & \dots & S_{k+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{k+p-1} & S_{k+p-2} & \dots & S_{k+2p-2} \end{vmatrix}} z^{2p+k},$$

puisqu'on a convenu de supprimer de la suite (S') les fractions $\frac{U}{V}$ où V s'annulerait pour la valeur de z considérée.

M. Hadamard *), recherchant un polynôme $P(z)$ tel que le produit d'une série donnée $f(z)$ par ce polynôme soit une série convergente dans un cercle de rayon supérieur au cercle de convergence de $f(z)$, a rencontré, lui aussi, ces rapports de déterminants.

---

*) Loc. cit., p. 40.

Écrivant avec lui

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} S_m & S_{m+1} & \dots & S_{m+p} \\ S_{m+1} & S_{m+2} & \dots & S_{m+p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m+p} & S_{m+p+1} & \dots & S_{m+2p} \end{vmatrix},$$

nous aurons à chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \pm \frac{D_{k,p}}{D_{k,p-1}} z^{2p+k}.$$

Or, on sait, d'après CAUCHY, que ce rayon a pour expression

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[k]{\frac{|D_{k,p}|}{|D_{k,p-1}|}} = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt[k]{|D_{k,p}|}}{\sqrt[k]{|D_{k,p-1}|}}.$$

Mais si les inégalités (z) sont vérifiées, on sait aussi que

$$\lim_{\infty=k} \sqrt[k]{|D_{k,p}|} = \frac{1}{|\alpha_1 \times \alpha_2 \dots \times \alpha_p|};$$

le rayon de convergence de la série (S') *est donc bien* (α_{p+1}).

11. CONVERGENCE UNIFORME. — *Si pour une valeur déterminée* z_0 *de la variable* z *les suites*

$$\frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \quad \frac{U_p^2}{V_2^p}, \quad \dots, \quad \frac{U_p^k}{V_k^p}, \quad \dots$$

(ligne horizontale de rang $p+1$ du tableau)

$$\frac{U_q^0}{V_0^q}, \quad \frac{U_q^1}{V_1^q}, \quad \frac{U_q^2}{V_2^q}, \quad \dots, \quad \frac{U_q^k}{V_k^q}, \quad \dots$$

(ligne horizontale de rang $q+1$ du tableau)

tendent l'une et l'autre vers des limites déterminées, ces limites sont identiques.

Il suffit de démontrer que si les fractions $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, d'une part, $\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}}$ d'autre part, tendent vers des limites finies et déterminées quand l'indice k croît indéfiniment, la différence de ces réduites tend vers zéro.

Sous ces conditions,

$$\frac{U_q^k}{V_k^q} - \frac{U_p^k}{V_k^p} = \left(\frac{U_q^k}{V_k^q} - \frac{U_{q-1}^k}{V_k^{q-1}}\right) + \left(\frac{U_{q-1}^k}{V_k^{q-1}} - \frac{U_{q-2}^k}{V_k^{q-2}}\right) + \dots + \left(\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}} - \frac{U_p^k}{V_k^p}\right)$$

tendra en effet vers zéro.

On a

$$\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}} - \frac{U_p^k}{V_k^p} = \frac{U_{p+1}^k V_k^p - U_p^k V_k^{p+1}}{V_k^p V_k^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{V_k^p V_k^{p+1}} \{ (S_0 C_{1,k}^{p+1} z + \cdots + C_{k,k}^{p+1} z^k)[1 - B_{1,p}^k z + \cdots + (-1)^p B_{p,p}^k z^p]$$

$$-(S_0 + C_{1,k}^p z + \cdots + C_{k,k}^p z^k)[1 - B_{1,p+1}^k z + \cdots + (-1)^{p+1} B_{p+1,p+1}^k z^{p+1}] \}$$

$$= (-1)^p \frac{C_{k,k}^p B_{p+1,p+1}^k z^{k+p+1}}{V_k^p V_k^{p+1}}$$

$$= (-1)^p \times \frac{\begin{vmatrix} S_k & \cdots & S_{k-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p} & \cdots & S_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & \cdots & S_{k-p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p-1} & \cdots & S_k \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} S_{k+1} & \cdots & S_{k+p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p+1} & \cdots & S_{k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_k & \cdots & S_{k-p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k+p} & \cdots & S_k \end{vmatrix}} \times \frac{z^{k+p+1}}{V_k^p V_k^{p+1}}$$

ou, posant $k - p + 1 = h$,

$$\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}} - \frac{U_p^k}{V_k^p} = \pm \frac{1}{V_k^p V_k^{p+1}} \times \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} \times z^{k+p+1}.$$

Pour la valeur de z considérée, V_k^p, V_k^{p+1} tendent, comme les réduites, vers des limites déterminées. Il suffit donc de montrer que, pour cette valeur de z, $\frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} z^{k+p+1}$ tend vers zéro lorsque k (ou h) croît indéfiniment.

Il en est bien ainsi, car la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} z^{k+p+1}$$

a pour rayon de convergence $|\alpha_{p+1}|$, nombre supérieur à $|z_0|$, puisque, *par hypothèse*, la suite $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, de rayon de convergence $|\alpha_{p+1}|$, converge au point z_0.

12. Si la suite

$$(\sigma) \qquad \frac{U_0^0}{V_0^0}, \quad \frac{U_0^1}{V_1^0}, \quad \frac{U_0^2}{V_2^0}, \quad \ldots, \quad \frac{U_0^n}{V_n^0}, \quad \ldots,$$

qui n'est autre que la suite

S_0, $S_0 + S_1 x$, $S_0 + S_1 x + S_2 x^2$, $\ldots$, $S_0 + S_1 x + \cdots + S_n x^n$, $\ldots$

du développement en séries de puissances limitées de la fonction $Z(z)$,

converge dans un cercle de rayon R, les suites

$$(\sigma') \qquad \frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \dots, \frac{U_p^n}{V_n^p}, \dots$$

convergeront dans le même cercle et *y représenteront la fonction* $Z(z)$ *tout comme la suite* (σ). Il se pourra même, sous les conditions que nous allons énoncer et qui sont les conséquences immédiates de l'analyse précédente, que les suites (σ') convergent et représentent la fonction $Z(z)$ dans des cercles de rayon $R_p > R$:

Étant donné une série de puissances entières positives et croissantes, représentant une fonction $Z(z)$ *dont les pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle* (C) *lui-même intérieur aux pôles suivants,* chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, *la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang p du tableau de* M. Padé *représente la fonction* $Z(z)$ *dans un cercle de rayon* $|\alpha_{p+1}|$, *où* α_{p+1} *est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle.*

Si tous les pôles sont simples et de modules différents, la représentation a lieu dans des cercles d'autant plus grands que la ligne horizontale choisie est plus éloignée dans le tableau. S'il y a des pôles de même module, multiples ou non, il y a stationnement, en ce sens que plusieurs lignes horizontales consécutives représentant la fonction ont le même rayon de convergence.

S'il y a enfin des points singuliers essentiels, le stationnement se prolonge indéfiniment ; aucune des fractions continues considérées ne représente la fonction en dehors du cercle sur la circonférence duquel se trouve le point singulier essentiel le plus rapproché de l'origine.

13. *Il se peut que la suite*

$$S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$$

diverge quelque petit que soit (z). *Le point* $z = 0$ *est alors un point singulier de la fonction* $Z(z)$. *Si ce point est pôle simple et si* α_1 *est l'affixe du point singulier le plus rapproché de l'origine, la suite des fractions constituant la seconde ligne horizontale du tableau convergera dans le cercle de rayon* $|\alpha_1|$, *car les dénominateurs de cette suite tendront vers* z. *Si le point* $z = 0$ *était pôle multiple d'ordre p, les suites de fractions constituant les lignes horizontales de rang* $> p - 1$ *convergeraient seules dans le cercle de rayon* $|\alpha_1|$. *Enfin, si le point était point singulier essentiel, aucune des suites de réduites*

horizontales ne convergerait. Ces conclusions admises, on est ramené au cas général.

CHAPITRE II.

Les réduites sont constituées par les fractions rationnelles $\frac{U_0^p}{V_p^0}, \frac{U_1^p}{V_p^1}, \frac{U_2^p}{V_p^2}, \ldots, \frac{U_m^p}{V_p^m}, \ldots$ de la colonne verticale de rang $p+1$ du tableau.

14. Je considère la fonction $Z(z)$

$$Z(z) = \frac{S_0\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\cdots}{\left(1-\frac{a}{z}\right)\left(1-\frac{b}{z}\right)\cdots}$$

$$= S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots = \frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots},$$

où les zéros d'une part, les pôles de l'autre, sont rangés par ordre de modules croissants. Les coefficients t sont déterminés en fonction des coefficients S par l'équation *identique* :

$$(S_0 + S_1 z + \cdots) \times (1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots) = S_0,$$

qui donne

$$(4) \qquad \begin{cases} S_1 + S_0 t_1 = 0 \\ S_2 + S_1 t_1 + S_0 t_2 = 0 \\ S_3 + S_2 t_1 + S_1 t_2 + S_0 t_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_i + S_{i-1} t_1 + S_{i-2} t_2 + \cdots + S_0 t_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si l'on pose, par ailleurs,

$$\frac{S_0}{1 + t'_1 z + t'_2 z^2 + \cdots}$$

$$= S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots + S_m z^m + \rho z^{m+1} + \cdots \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

les constantes $t'_1, t'_2, \ldots, t'_m$ seront déterminées par le système

$$(5) \qquad \begin{cases} S_1 + S_0 t'_1 = 0 \\ S_2 + S_1 t'_1 + S_0 t'_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_m + S_{m-1} t'_1 + S_{m-2} t'_2 + \cdots + S_0 t'_m = 0 \end{cases}$$

et la comparaison avec le système (4) montre que la fraction de rang $m + 1$ de la première colonne du tableau relatif à la fonction $Z(z)$ a pour expression

$$\frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_m z^m}.$$

La suite des fractions de la première colonne est donc

$$\frac{S_0}{1}, \quad \frac{S_0}{1 + t_1 z}, \quad \frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2}, \ldots$$

15. Il est clair que pour toute valeur de z de module inférieur à $|\alpha|$, cette suite converge vers une valeur finie, déterminée et différente de zéro, exception faite pour les pôles situés à l'intérieur du cercle de rayon $|\alpha|$. Au contraire, cette suite tend constamment vers zéro quand z est à l'extérieur du cercle de rayon $|\alpha|$.

On peut faire un raisonnement identique pour la colonne verticale constituée par les réduites de rang $p + 1$, en se basant sur ce fait que les zéros et les pôles de la série

$$S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$$

sont pôles et zéros de la série

$$\frac{1}{S_0} + \frac{t_1}{S_0} z + \frac{t_2}{S_0} z^2 + \cdots.$$

En effet, si l'on pose d'une part

$$\text{(6)} \quad \frac{S_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_p z^p}{1 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n} = S_0 + S_1 z + \cdots + S_{n+p} z^{n+p} + \lambda z^{n+p+1}$$

(je dis « poser » pour indiquer que $A_1, A_2, \ldots, A_p, u_1, \ldots, u_n$ sont déterminés par la condition que $S_0, S_1, \ldots, S_{n+p}$ soient les coefficients des $n + p$ premiers termes des développements de la fraction rationnelle) et d'autre part

$$\text{(7)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 + v_1 z + v_2 z^2 + \cdots + v_n z^n}{S_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots + B_p z^p} \\ & = \frac{1}{S_0} + \frac{t_1}{S_0} z + \frac{t_2}{S_0} z^2 + \cdots + \frac{t_{n+p}}{S_0} z^{n+p} + \mu z^{n+p+1} + \cdots, \end{aligned} \right.$$

on a identiquement

$$v_i = u_i, \quad B_j = A_j, \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \ (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ce *lemme* résulte de ce que

$$\frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{n+p} z^{n+p} + \mu z^{n+p+1} + \cdots}$$
$$= S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots + S_{n+p} z^{n+p} + \lambda z^{n+p+1} + \cdots,$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{S_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots + B_p z^p}{1 + v_1 z + v_2 z + \cdots + v_n z^n} = \frac{S_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_p z^p}{1 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n}.$$

Nous en concluons la proposition que voici :

La suite des réduites constituant la colonne de rang $p + 1$ du tableau se comporte comme la suite des réduites formant la ligne horizontale de rang $p + 1$, à cette différence près qu'ici les cercles de convergence sont les cercles passant par les zéros de la fonction représentée par la série et qu'en dehors de ces cercles la suite des réduites tend vers zéro, au lieu de tendre vers l'infini.

En effet, on peut déterminer la réduite

$$\frac{S_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_p z^p}{1 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n}$$

en posant

$$\frac{S_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_p z^p}{1 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n} = \frac{S_0}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{n+p} z^{n+p} + \mu z^{n+p+1} + \cdots}$$

ou

$$\frac{1 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n}{S_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_p z^p}$$

$$= \frac{1}{S_0} + \frac{t_1 z}{S_0} + \frac{t_2 z^2}{S_0} + \cdots + \frac{t_{n+p} z^{n+p}}{S_0} + \frac{\mu z^{n+p+1}}{S_0} + \cdots.$$

Cela ramène l'étude de la suite des réduites de la colonne verticale de rang p à l'étude de la suite des réduites de la ligne horizontale de rang p du tableau correspondant à la série

$$\sum_0^\infty \frac{t_i}{S_0} z_i = \frac{1}{S_0} \sum_0^\infty t_i z^i.$$

La suite des réduites d'une colonne verticale quelconque ne saurait prolonger la fonction en dehors du cercle dont la circonférence passe par le point singulier essentiel le plus proche de l'origine, puisque si le point α est point singulier essentiel pour la fonction $Z(z)$ il l'est aussi pour la fonction $\frac{1}{Z(z)}$.

Dans certains cas, il y aura évidemment lieu de préférer les suites de réduites verticales aux suites de réduites horizontales. C'est ainsi que la première colonne verticale du tableau relatif à la fonction $\frac{\log(2 + z)}{(1 - z)^3}$ donnera un développement convergent dans le cercle de rayon 2, tandis que la première ligne horizontale donnerait un développement convergeant dans le cercle de rayon 1 seulement.

DEUXIÈME PARTIE.

LES FRACTIONS CONTINUES DE LA FORME $\mathfrak{Q}$.

CHAPITRE I.

Forme générale des relations de récurrence existant entre les termes de trois réduites consécutives d'une fraction continue de la deuxième classe. Extension aux fractions complémentaires.

I. — Fractions de la deuxième classe ordinaire.

16. De telles suites de réduites sont de la forme (cf. le tableau des fractions approchées)

$$\frac{U_0^p}{V_p^0},\quad \frac{U_1^{p+1}}{V_{p+1}^1},\quad \frac{U_2^{p+2}}{V_{p+2}^2},\quad \cdots \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{1}$$

$$\frac{U_q^0}{V_0^q},\quad \frac{U_{q+1}^1}{V_1^{q+1}},\quad \frac{U_{q+2}^2}{V_2^{q+2}},\quad \cdots \quad (q=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{2}$$

17. Nous allons considérer 3 réduites consécutives de la suite (1)

$$\frac{U_{n-1}^{p+n-1}}{V_{p+n-1}^{n-1}},\quad \frac{U_n^{p+n}}{V_{p+n}^n},\quad \frac{U_{n+1}^{p+n+1}}{V_{p+n-1}^{n+1}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}},\quad \frac{U_{p+n}}{V_n},\quad \frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}},$$

ce qui n'offre aucune ambiguité si l'on se rappelle que les fractions appartiennent à la diagonale au-dessus de la première diagonale et de rang p, qu'elles sont consécutives et que les indices marquent les degrés en z des polynômes U, V.

Si ces fractions représentent une fonction

$$Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

on aura par définition

$$\frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_{p+n}}{V_n} = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+2n+2} z^{p+2n+2} + \lambda z^{p+2n+3} + \cdots)$$
$$- (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+2n} z^{p+2n} + \mu z^{p+2n-1} + \cdots) = \rho z^{p+2n+1} + \cdots,$$

d'où

$$U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1} = V_n V_{n+1}(\rho z^{p+2n+1} + \cdots).$$

Or le premier membre de cette relation est un polynôme en z de degré $p+2n+1$; donc le deuxième membre se réduit à son terme de moindre degré en z et

$$(3) \qquad U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1} = \sigma(n)z^{p+2n+1},$$

où $\sigma(n)$ est un polynôme en n, qu'on obtiendrait en faisant $z=1$.

Changeant n en $n-1$,

$$U_{p+n}V_{n-1} - U_{p+n-1}V_n = \sigma(n-1)z^{p+2n-1}.$$

Éliminant z entre cette relation et la précédente, il vient

$$\sigma(n)(U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n-1}) - \sigma(n)z^2(U_{p+n}V_{n-1} - V_n U_{p+n-1}) = 0,$$

ou, quel que soit B_n, fonction de n et de z,

$$V_n[\sigma(n-1)U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \sigma(n)z^2 U_{p+n-1}]$$
$$- U_{p+n}[\sigma(n-1)V_{n+1} + B_n V_n + \sigma(n)z^2 V_{n-1}] = 0.$$

Si B_n est déterminé par cette condition que

$$\sigma(n-1)U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \sigma(n)z^2 U_{p+n-1} = 0,$$

on aura semblablement

$$\sigma(n-1)V_{n+1} + B_n V_n + \sigma(n)z^2 V_{n-1} = 0.$$

Ainsi, *il existe une même relation de récurrence entre les numérateurs et les dénominateurs de 3 fractions consécutives appartenant à une diagonale principale située au-dessus de la première diagonale principale ou, ceci est un cas particulier, appartenant à cette première diagonale principale même.*

Cette proposition est un cas particulier d'une proposition que nous avons rappelée au début.

18. *Réciproquement,* considérons six polynômes

$$U_{p+n+1}, \quad U_{p+n}, \quad U_{p+n-1}, \quad V_{n+1}, \quad V_n, \quad V_{n-1}$$

liés par des rélations de récurrence

$$A_n U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + C_n U_{p+n-1} = 0,$$
$$A_n V_{n+1} + B_n V_n + C_n V_{n-1} = 0,$$

où A_n, B_n, C_n sont des polynômes en z fonctions de n. Sous quelles conditions les fractions $\frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}}$, $\frac{U_{p+n}}{V_n}$, $\frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}}$ *seront-elles fractions consécutives d'une même diagonale principale d'un tableau de* M. Padé?

Éliminons B_n entre les relations précédentes; il vient

$$A_n(U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1}) = C_n(U_{p+n}V_{n-1} - U_{p+n-1}V_n);$$

changeant n en $n-1$,

$$A_{n-1}(U_{p+n}V_{n-1} - U_{p+n-1}V_n) = C_{n-1}(U_{p+n-1}V_{n-2} - U_{p+n-2}V_{n-1})$$

. . . .

$$A_1(U_{p+2}V_1 - U_{p+1}V_2) = C_1(U_{p+1}V_{n-2} - U_{p+n-2}V_{n-1})$$

et, par multiplication,

$$U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1} = \frac{C_n C_{n-1} \ldots C_1}{A_n A_{n-1} \ldots A_1}(U_{p+1}V_0 - U_p V_1).$$

Or, si

$$\frac{U_{p+1}}{V_1} = \frac{U_1^{p+1}}{V_{p+1}^1} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+2}z^{p+2} + \lambda z^{p+3} + \cdots,$$

$$\frac{U_p}{V_0} = \frac{U_0^p}{V_p^0} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p + \mu z^{p+1} + \cdots,$$

on aura

$$\frac{U_{p+1}}{V_1} - \frac{U_p}{V_0} = \rho z^{p+1} + \cdots,$$

d'où

$$U_{p+1}V_0 - U_p V_1 = (\rho z^{p+1} + \cdots)V_0 V_1 = \omega(n) z^{p+1},$$

par raison d'homogénéité, d'où

$$U_{p+n+1}V_n - U_{p+n}V_{n+1} = \frac{C_n C_{n-1} \ldots C_1}{A_n A_{n-1} \ldots A_1}\omega(n) z^{p+1}.$$

Mais (3) cette expression doit être de la forme $\sigma(n) z^{p+2n+1}$; il vient donc, en posant

$$\frac{C_n}{A_n} = J_n, \qquad \frac{\sigma(n)}{\omega(n)} = \theta(n),$$

$$J_n J_{n-1} \ldots J_1 = \theta(n) z^{2n},$$

et, de même,

$$J_{n-1} J_{n-2} \ldots J_1 = \theta(n-1) z^{2n-2},$$

d'où

$$J_n = \frac{\theta(n)}{\theta(n-1)} z^2 = \frac{C_n}{A_n}.$$

Ainsi C_n est de la forme

$$C_n = \Pi(n) z^2 A_n$$

et les relations de récurrence sont de la forme

$$A_n U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \Pi(n) z^2 A_n U_{p+n-1} = 0,$$

$$A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 A_n V_{n-1} = 0.$$

D'ailleurs, si A_n est de degré h en z, B_n sera de degré $h+1$, par raison d'homogénéité. Même dans les fractions du type (C) que nous considérons plus spécialement, A_n et B_n sont de degrés respectifs 0 et 1 en n.

Enfin, il est évident qu'une relation de même forme existe entre les réduites de la suite (2), correspondant à une diagonale située au-dessous de la première diagonale principale.

II. — Fractions de deuxième classe complémentaires.

19. *Le tableau complémentaire.*

On peut construire un tableau analogue à celui de M. Padé en partant du développement suivant la puissance décroissante de la variable:

$$Z(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots.$$

Soit encore

$$Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

et

$$\frac{U_p(z)}{V_q(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p+q} z^{p+q} + \lambda z^{p+q+1} + \cdots,$$

on aura

$$(1)\quad \frac{U_p\left(\frac{1}{z}\right)}{V_q\left(\frac{1}{z}\right)} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{p+q}}{z^{p+q}} + \frac{\lambda}{z^{p+q+1}} + \cdots = \frac{z^q U_{p,1}(z)}{z^p V_{q,1}(z)}$$

et aussi

$$Z\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Ainsi les fractions

$$\frac{z^q U_{p,1}(z)}{z^p V_{q,1}(z)}$$

sont des fractions approchées de la fonction $Z\left(\frac{1}{z}\right) = \zeta(z)$, au sens de ce mot défini par la relation (1). Nous appellerons ces fractions: *fractions complémentaires.*

20. *Loi de récurrence liant les termes de fractions complémentaires consécutives.*

Considérons une suite de fractions approchées consécutives du Ta-

bleau de M. Padé appartenant à une diagonale principale située au-dessus de la première diagonale :

$$\frac{U_{p+n-1}}{V_{n-1}}, \quad \frac{U_{p+n}}{V_n}, \quad \frac{U_{p+n+1}}{V_{n+1}}$$

et liées par la relation de récurrence

$$(2) \qquad \begin{cases} A_n U_{p+n+1} + B_n U_{p+n} + \Pi(n) z^2 A_n U_{p+n-1} = 0 \\ A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 A_n V_{n-1} = 0. \end{cases}$$

On aura aussi

$$A_n\left(\frac{1}{z}\right) U_{p+n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + B_n\left(\frac{1}{z}\right) U_{p+n}\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$+ \Pi(n) \frac{1}{z^2} A_n U_{p+n-1}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

et si A_n, B_n sont respectivement de degrés h et $h+1$ en z,

$$A_{n,1} U_{p+n+1,1} + B_{n,1} U_{p+n,1} + \Pi(n) A_{n,1} U_{p+n-1} = 0,$$

où

$$A_{n,1}(z) = z^h A_n\left(\frac{1}{z}\right), \quad B_{n,1}(z) = z^{h+1} B_n\left(\frac{1}{z}\right), \quad U_{k,1}(z) = z^k U_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

et de même

$$A_{n,1} V_{n+1,1} + B_{n,1} V_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} V_{n-1} = 0,$$

les fractions approchées étant

$$\frac{z^n U_{p+n,1}}{z^{p+n} V_{n,1}} = \frac{U_{p+n,1}}{z^p V_{n,1}}.$$

Dans les relations de récurrence en question

$$(3) \qquad \begin{cases} A_{n,1} U_{p+n+1,1} + B_{n,1} U_{p+n,1} + \Pi(n) A_{n,1} U_{p+n-1,1} = 0, \\ A_{n,1} V_{n+1,1} + B_{n,1} V_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} V_{n-1,1} = 0, \end{cases}$$

les polynômes $A_{n,1}$, $B_{n,1}$ sont respectivement de degrés h et $h+1$.

Pour une suite de fraction appartenant à une diagonale principale située au-dessous de la première diagonale principale, on aurait semblablement

$$A_{n,1} U_{n+1,1} + B_{n,1} U_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} U_{n-1,1} = 0,$$
$$A_{n,1} V_{q+n+1,1} + B_{n,1} V_{q+n,1} + \Pi(n) A_{n,1} V_{q+n-1,1} = 0,$$

les fractions approchées étant $\dfrac{z^q U_{n,1}}{V_{p+n,1}}$.

Enfin, pour la première diagonale principale, on aurait

$$(4) \qquad \begin{cases} A_{n,1} U_{n+1,1} + B_{n,1} U_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} U_{n-1,1} = 0, \\ A_{n,1} V_{n+1,1} + B_{n,1} V_{n,1} + \Pi(n) A_{n,1} V_{n-1,1} = 0, \end{cases}$$

les fractions approchées étant $\dfrac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$.

21. *Si l'on a obtenu la relation* (4) *définissant les fractions approchées* (*tableau complémentaire*, première diagonale principale) *d'une fonction*

$$Z_1(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} A_n U_{n+1} + B_n U_n + \Pi(n) z^2 U_{n-1} = 0 \\ A_n V_{n+1} + B_n V_n + \Pi(n) z^2 V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

définiront les fractions approchées (tableau de M. Padé, première diagonale principale) *de la fonction*

$$Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z).$$

En effet (1)

$$\frac{U_{p,1}(z)}{V_{p,1}(z)} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{2p}}{z^{2p}} + \frac{\lambda}{z^{2p+1}} + \cdots,$$

d'où

$$\frac{U_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)}{V_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^p \times U_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)}{z^p \times V_{p,1}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{U_p(z)}{V_p(z)}$$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{2p} z^{2p} + \lambda z^{2p+1} + \cdots.$$

D'ailleurs

$$Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots.$$

De même, si l'on a obtenu les relations (3) *définissant des fractions approchées complémentaires d'une fonction* $Z_1(z)$, *les relations* (2) *définiront les fractions approchées ordinaires de la fonction* $Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z)$.

22. *Forme des fractions continues complémentaires de deuxième classe.* Les termes des réduites de toute fraction continue

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}$$

sont liés par la loi de récurrence

$$U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0$$

$$V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, si $A_{n,1}$, $B_{n,1}$ sont respectivement de degrés o et 1 en z et si

$$\frac{B_{n,1}}{A_{n,1}} = -(a_n z + b_n), \qquad \Pi(n) = -C_n,$$

la fraction continue correspondant à la relation sera de la forme

$$F = \cfrac{\gamma_1}{\beta_1 + \cfrac{\gamma_2}{\alpha_2 z + \beta_2 + \cfrac{\gamma_3}{\alpha_3 z + \beta_3 + \cfrac{\gamma_4}{\ddots}}}},$$

les relations de récurrence étant

$$(A) \qquad \begin{cases} U_{n+1} - (a_n z + b_n)U_n - c_n U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - (a_n z + b_n)V_n - c_n V_{n-1} = 0; \end{cases}$$

d'ailleurs les réduites de la fraction continue F correspondant aux lois de récurrence (A) vérifient les relations

$$U_{n+1,1} - (\alpha_n z + \beta_n)U_{n,1} - \gamma_n U_{n-1,1} = 0,$$
$$V_{n-1,1} - (\alpha_n z + \beta_n)V_{n,1} - \gamma_n V_{n-1,1} = 0;$$

donc

$$F = \cfrac{\gamma_1}{\beta_1 + \cfrac{\gamma_2}{\beta_2 + \cfrac{c_2}{a_2 z + b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 z + b_3 + \cfrac{c_3}{\ddots}}}}}$$

Un calcul facile donne les termes γ_1, β_1, γ_2, β_2 en fonction de $U_{0,1}$, $U_{1,1}$, $V_{0,1}$, $V_{1,1}$, en sorte que

$$F = \cfrac{U_{0,1}}{V_{0,1} + \cfrac{V_{1,1} - V_{0,1}\dfrac{U_{1,1}}{V_{1,1}}}{\dfrac{U_{1,1}}{U_{0,1}} + \cfrac{c_2}{a_2 z + b_2 + \cfrac{c_3}{a_3 z + b_3 + \cfrac{c_4}{\ddots}}}}}.$$

III. — Relations entre les aires de convergences des fractions ordinaires et des fractions complémentaires de deuxième classe.

23. L'étude de la convergence d'une suite de fractions $\dfrac{U_n}{V_n}$ sera basée sur l'étude de la convergence de la série

$$\frac{U_0}{V_0}+\left(\frac{U_1}{V_1}-\frac{U_0}{V_0}\right)+\left(\frac{U_2}{V_2}+\frac{U_1}{V_1}\right)+\cdots$$

et en particulier sur l'étude du rapport

$$\left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}+\frac{U_n}{V_n}\right):\left(\frac{U_n}{V_n}-\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right).$$

Si le module de ce rapport tend vers une limite *moindre que* UN, la série et la suite des fractions convergent.

Si ce rapport tend vers UN, il y a doute. En ce cas, l'étude directe de la fonction dont les fractions $\dfrac{U_n}{V_n}$ sont des représentations approchées permet parfois de lever le doute.

24. Comme on l'a vu, il existe une relation simple entre les développements en fractions continues de deuxième classe ordinaires et complémentaires des fonctions $Z_1(z)$ et $Z(z)=Z_1\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Il existe aussi une relation simple entre les aires de convergence de ces développements.

Soit en effet $\dfrac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$ des fractions approchées complémentaires (première diagonale) d'une fonction $Z_1(z)$:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_{n,1}U_{n+1,1}+B_{n,1}U_{n,1}+\Pi(n)A_{n,1}U_{n-1,1}=0\\ A_{n,1}V_{n+1,1}+B_{n,1}V_{n,1}+\Pi(n)A_{n,1}V_{n-1,1}=0\end{cases}$$

et $\dfrac{U_n}{V_n}$ les fractions approchées ordinaires correspondantes de la fonction $Z_1\left(\dfrac{1}{z}\right)=Z(z)$:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_nU_{n+1}+B_nU_n+\Pi(n)z^2A_{n,1}U_{n-1}=0,\\ A_nV_{n+1}+B_nV_n+\Pi(n)z^2A_{n,1}V_{n-1}=0.\end{cases}$$

Considérons les deux suites

$$(3)\qquad \frac{U_{0,1}}{V_{0,1}}+\left(\frac{U_{1,1}}{V_{1,1}}-\frac{U_{0,1}}{V_{0,1}}\right)+\left(\frac{U_{2,1}}{V_{2,1}}-\frac{U_{1,1}}{V_{1,1}}\right)+\cdots$$

$$(4)\qquad \frac{U_0}{V_0}+\left(\frac{U_1}{V_1}-\frac{U_0}{V_0}\right)+\left(\frac{U_2}{V_2}-\frac{U_1}{V_1}\right)+\cdots$$

et les rapports

$$R_1(z)=\left(\frac{U_{n+1,1}}{V_{n+1,1}}-\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}\right):\left(\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}-\frac{U_{n-1,1}}{V_{n-1,1}}\right)$$

$$=\frac{U_{n+1,1}V_{n,1}-U_{n,1}V_{n+1,1}}{U_{n,1}V_{n-1,1}-U_{n-1,1}V_{n,1}}\times\frac{V_{n,1}V_{n-1,1}}{V_{n+1,1}V_{n,1}}=\Pi(n)\frac{V_{n,1}V_{n-1,1}}{V_{n+1,1}V_{n,1}}$$

$$R_2(z)=\left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}-\frac{U_n}{V_n}\right):\left(\frac{U_n}{V_n}-\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)=\Pi(n)z^2\frac{V_nV_{n-1}}{V_{n+1}V_n},$$

car les relations (1), (2) donnent respectivement par élimination de $B_{n,1}$, B_n:

$$U_{n+1,1}.V_{n,1}-V_{n+1,1}U_{n,1}=\Pi(n)\times(U_{n,1}V_{n-1,1}-V_{n,1}U_{n-1,1})$$

$$U_{n+1}.V_n-V_{n+1}U_n=z^2\Pi(n)\times(U_nV_{n-1}-V_{n-1}U_n).$$

Les relations

$$U_{n,1}(z)=z^nU_n\left(\frac{1}{z}\right),\qquad V_{n,1}(z)=z^nV_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

permettent d'écrire

$$R_1(z)=\Pi(n)\frac{z^nV_n\left(\frac{1}{z}\right)\times z^{n-1}V_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1}V_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)z^nV_n\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$=\Pi(n).\frac{1}{z^2}\times\frac{V_n\left(\frac{1}{z}\right).V_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{V_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right).V_n\left(\frac{1}{z}\right)}=R_2\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il s'ensuit que, *si les suites de fractions* (1) représentant la fonction $Z_1(z)$ *convergent pour la valeur* z_0 *de la variable, les suites de fractions* (2) *qui représentent la fonction* $Z_1\left(\frac{1}{z}\right)=Z(z)$ *convergent pour la valeur* $\frac{1}{z_0}$ *de la variable, et réciproquement.*

Si la suite (1) converge dans l'aire $A(x, y)$, c'est-à-dire converge en tous les points $z_0=x_0+iy_0$ de cette aire, la suite (2) qui représente

la fonction $Z_1\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z)$ convergera aux points

$$\frac{1}{x_0 + iy_0} = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{iy_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

de cette aire, c'est-à-dire dans l'aire

$$A\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-iy}{x^2 + y^2}\right) = A_1(x, y).$$

En particulier, si l'aire de convergence $A(x, y)$ relative à la fonction $Z_1(z)$ comprend tout le plan, sauf les points d'un arc de courbe $f(x, y) = 0$, l'aire de convergence A_1 relative à la fonction $Z(z)$ comprendra tout le plan, sauf les points de l'arc $f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = 0$ transformé du premier arc par rayons vecteurs réciproques, le pôle de *transformation étant à l'origine et la puissance étant* UN.

CHAPITRE II.

Étude d'un cas particulier.

25. LAGUERRE a étudié le développement en fractions continues des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \qquad W \times \frac{d.Z(z)}{dz} = V \times Z(z) + U,$$

où W, V, U sont des polynômes en z.

Il part de l'identité, supposée vérifiée,

$$Z(z) = \frac{\varphi_n(z)}{f_n(z)} + \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

où $\varphi(z)$, $f(z)$ sont l'un et l'autre des polynômes en z de degré n et où $\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$ désigne une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable z commençant par un terme de degré $-(2n+1)$ et il montre que $f(z)$ doit vérifier une équation différentielle de second ordre : de cette équation, il déduit une loi de récurrence entre les polynômes $f_{n+2}(z)$, $f_{n+1}(z)$, $f_n(z)$. On sait d'ailleurs que les polynômes $\varphi_{n+2}(z)$, $\varphi_{n+1}(z)$, $\varphi_n(z)$ vérifient la même loi de récurrence. Cette loi de récurrence conduit au développement en fraction continue de la fonction $Z(z)$.

A dire vrai, LAGUERRE n'a appliqué son procédé qu'à des fonctions très simples, telles que $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\omega}$ (constante quelconque) (cf. § 42), vérifiant toutes l'équation particulière :

$$(2) \qquad (az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

où a, b, c, d, p, q sont des constantes arbitraires et $\Pi(z)$ un polynôme quelconque et il n'a même pas donné le développement en fraction continue des fonctions vérifiant l'équation (2).

Suivant les indications que LAGUERRE a laissées, je donne d'abord ce développement. Puis, prenant comme point de départ les relations de récurrence existant entre les numérateurs et les dénominateurs de 3 réduites consécutives quelconques, *je montre que le développement est valable dans tout le plan de la variable z, sauf pour les points situés sur la coupure joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ qui sont points singuliers pour la fonction $Z(z)$.*

I. — Développement en fraction continue de la fonction vérifiant l'équation différentielle :

$$(2) \qquad (az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z),$$

où a, b, c, d, p, q sont des constantes quelconques et $\Pi(z)$ un polynôme en z.

26. Nous supposons que $Z(z)$ est développable suivant les puissances négatives de la variable :

$$Z(z) = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots.$$

Déterminons avec LAGUERRE deux polynômes de degré n, U_n, V_n par la condition que les $2n+1$ premiers termes du développement

$$S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z_2} + \cdots$$

de la fraction rationnelle $\frac{U_n}{V_n}$ soient identiques aux $2p+1$ premiers termes du développement de $Z(z)$, en sorte que

$$(3) \qquad Z(z) = \frac{U_n}{V_n} + \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

où $\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$ répresente une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de z, commençant par un terme en $\frac{1}{z^{2n+1}}$.

Les polynômes U_n, V_n peuvent être déterminés, une fois le développement de z connu, par l'identification du polynôme U_n au produit

$$V_n \times \left(S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{M_1}{z^{2n+1}} + \frac{M_2}{z^{2n+2}} + \cdots\right).$$

On déduit de (3)

$$Z'(z) = \frac{VU' - UV'}{V^2} + \left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right)$$

et, portant ces valeurs de $Z(z)$ et $Z'(z)$ dans (2), il vient

$$(az + b)(cz + d)\frac{VU' - UV'}{V^2} - (pz + q)\frac{U}{V} - \Pi(z)$$

$$= (pz + q)\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) - (az + b)(cz + d)\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

$$(az+b)(cz+d)(VU' - UV') - (pz+q)UV - \Pi(z)V^2 = \left(\frac{1}{z^{2n}}\right)V^2.$$

Changeant z en $\frac{1}{z}$,

$$\frac{1}{z^{2n+1}}(a + bz)(c + dz)(V_1U_2 - U_1V_2)$$

$$-\frac{1}{z^{2n+1}}(p + qz)U_1V_1 - \frac{\Pi_1(z)}{z^{\pi+2n}}V_1^2 = \frac{1}{z^{2n}}V_1^2(z^{2n}),$$

où l'on a posé

$$V_1(z) = z^n V\left(\frac{1}{z}\right), \qquad U_2(z) = z^{n-1} U'\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$U_1(z) = z^n U\left(\frac{1}{z}\right), \qquad V_2(z) = z^{n-1} V'(z)$$

$$\Pi_1(z) = z^\pi \Pi\left(\frac{1}{z}\right),$$

en désignant par π le degré du polynôme $\Pi(z)$.

Ceci peut s'écrire

$$[(a+bz)(c+dz)V_1U_2 - U_2V_1) - (p+qz)U_1V_1]z^{\pi-1} - \Pi_1V_1^2 = V_1^2(z^{2n+\pi}),$$

(z^{2n}) et $(z^{2n+\pi})$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et dont les premiers termes sont de degrés respectifs $2n$ et $2n + \pi$.

Le premier membre étant de degré $2n + \pi$, la série $V_1^2(z^{2n+\pi})$ ne peut que se réduire à son premier terme, d'où

$$[(a+bz)(c+dz)(V_1 U_2 - U_1 V_2) - (p+qz)\, U_1 V_1]z^{\pi-1} - \Pi_1 V_1^2$$
$$= z^{2n+\pi} \times \text{constante}.$$

Changeant à nouveau z en $\frac{1}{z}$,

(4) $(az+b)(cz+d)(V U' - U V') - (pz+q)\, U V - \Pi(z)\, V^2 = \text{constante}.$

27. A l'aide de cette relation, LAGUERRE forme comme il suit une équation différentielle dont V est solution.

Soit

(5) $N(z).y'' - M(z)y' + H.y = 0$ ou $y'' - \frac{M}{N}y' + \frac{H}{N}y = 0$

une équation différentielle linéaire du second ordre admettant les deux solutions particulières

$$y_1 = V(z), \qquad y_2 = e^{-\int \frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)}dz} \times [U(z) - V(z).Z(z)].$$

Des identités

$$Ny_1'' - My_1' + Hy_1 = 0,$$
$$Ny_2'' - My_2' + Hy_2 = 0,$$

on déduit, par élimination de H,

$$N(y_1''y_2 - y_2''y_1) = M(y_1'y_2 - y_2'y_1),$$

d'où

$$\frac{M}{N} = \frac{d.}{dz}\,\mathrm{Log}\,(y_1'y_2 - y_2'y_1)\,;$$

or, en posant

$$\frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)} = R(z),$$

$$y_1'y_2 - y_2'y_1 = V'e^{-\int R.dz}(U - VZ) - Ve^{-\int Rdz}(U' - V'Z - VZ')$$
$$+ Ve^{-\int Rdz} \times R(U - VZ) = e^{-\int Rdz}[V'U - VU' + V^2Z' + VUR - V^2ZR]$$
$$= \frac{e^{-\int Rdz}}{(az+b)(cz+d)}[(az+b)(cz+d)(VU' - UV')$$
$$+ V^2(az+b)(cz+d)Z' - Z(pz+q) + UV(pz+q)]$$

ou, vu la relation (2),

$$y_1'y_2 - y_2'y_1$$
$$= \frac{e^{-\int Rdz}}{(az+b)(cz+d)}[V^2\Pi(z) + UV(pz+q) - (az+b)(cz+d)(VU' - UV')]$$

et, tenant compte de (4),

$$y_1'y_2 - y_2'y_1 = -\frac{e^{-\int R\,dz}}{(az+b)(cz+d)}\times\text{const.} = -\frac{e^{\int\frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)}}}{(az+b)(cz+d)}\times\text{const.},$$

d'où

$$\frac{M}{N} = \frac{d}{dz}\log(y_1'y_2 - y_2'y_1) = -\frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)} - \frac{a}{az+b} - \frac{c}{cz+d}$$
$$= -\frac{(p+2ac)z+ad+bc+q}{(az+b)(cz+d)}.$$

L'équation différentielle (5) que vérifie V est donc de la forme

$$(az+b)(cz+d)y'' + [(p+2ac)z+ad+bc+q]y' + \lambda y = 0,$$

où λ est indépendant de z, vu l'homogénéité.

Si

$$V = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n,$$

exprimant que le terme de plus haut degré est nul, il viendra

$$n(n-1)ac + n(p+2ac) + \lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = -n[(n+1)ac + p].$$

Ainsi le polynôme V est une solution de l'équation

$$(6)\quad (az+b)(cz+d)y'' + [(p+2ac)z+ad+bc+q]y' - n[(n+1)ac+p]y = 0.$$

28. Cela posé, Laguerre remarque que la relation

$$U_{n-1}V_n - U_nV_{n-1} = -A_{n-1},$$

où A_{n-1} est indépendant de z, comme on le voit immédiatement en remplaçant $\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}$, $\frac{U_n}{V_n}$ par leurs développements

$$\frac{U_{n-1}}{V_{n-1}} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n-2}}{z^{2n-2}} + \frac{M_1}{z^{2n-1}} + \frac{M_2}{z^{2n}} + \frac{M_3}{z^{2n+1}} + \cdots$$

$$\frac{U_n}{V_n} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n-2}}{z^{2n-2}} + \frac{S_{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{N_1}{z^{2n+1}} + \cdots,$$

donne lieu à celle-ci

$$(U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1})A_{n-1} = (U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n)A_n,$$

qu'on peut écrire

$$(V_{n+1}A_{n-1} + V_{n-1}A_n)U_n = (U_{n+1}A_{n-1} + U_{n-1}A_n)V_n$$

ou

$$(V_{n+1} + V_{n-1}P_{n-1})U_n = (U_{n+1} + U_{n-1}P_{n-1})V_n,$$

en posant

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1}.$$

Si l'on détermine le polynôme Q_{n-1} par la condition que

$$V_{n+1} - Q_{n-1} V_n + P_{n-1} V_{n-1} = 0,$$

il s'en suivra que

$$U_{n+1} - Q_{n-1} U_n + P_{n-1} U_{n-1} = 0.$$

Ainsi, les polynômes U, V vérifient les relations de récurrence

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} - Q_{n-1} U_n + P_{n-1} U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - Q_{n-1} V_n + P_{n-1} V_{n-1} = 0, \end{array} \right.$$

où P, étant indépendant de z, Q est du 1^er^ degré en z.

29. Ici LAGUERRE remarque qu'on peut faire l'hypothèse que voici: *La constante de l'équation* (4) *est égale à* $-A_n$. Et *en effet*, la relation supposée

$$\frac{U_n(z)}{V_n(z)} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{M_1}{z^{2n+1}} + \cdots$$

donne lieu à celle-ci

$$\frac{U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = S_0 + S_1 z + S_{2n} z^{2n} + M_1 z^{2n+1} + \cdots = \frac{z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{U_{n,1}(z)}{V_{n,1}(z)}.$$

Si

$$U_{n,1} = S_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n,$$
$$V_{n,1} = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots + \gamma_n z^n,$$

on aura

$$\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}} = \frac{\lambda S_0 + \lambda \beta_1 z + \cdots + \lambda \beta_n z^n}{\lambda + \lambda \gamma_1 z + \cdots + \lambda \gamma_n z^n} = \frac{z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{U_n\left(\frac{1}{z}\right)}{V_n\left(\frac{1}{z}\right)},$$

d'où

$$\frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{\lambda S_0 z^n + \lambda \beta_1 z^{n-1} + \lambda \beta_2 z^{n-2} + \cdots + \lambda \beta_n}{\lambda z^n + \lambda \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \lambda \gamma_n},$$

quelle que soit l'indéterminée λ, et si le polynôme

$$z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \gamma_n$$

vérifie l'équation (6), il en est de même du polynôme

$$\lambda z^n + \lambda \gamma_1 z^{n-1} + \cdots + \lambda \gamma_n.$$

Or, la relation

$$U_{n-1}V_n - U_nV_{n-1} = -A_{n-1},$$

où A_{n-1} est une constante, donne, dans ces conditions,

$$A_{n-1} = \mu\lambda(\beta_n\varepsilon_{n-1} - \delta_{n-1}\gamma_n)$$

et si

$$\Pi(z) = \Pi_0 z + \Pi_1 z^2 + \cdots + \Pi_\Pi$$

la relation (4) donne

$$bd(\lambda\gamma_n.\lambda\beta_{n-1} - \lambda\beta_n.\lambda\gamma_{n-1}) - q\lambda^2\beta_n\gamma_n - \Pi_\Pi\lambda^2\gamma_n^2 = \text{constante.}$$

Supposer que la constante est égale à $-A_n$ revient donc à écrire

$$\lambda[bd(\gamma_n\beta_{n-1} - \beta_n\gamma_{n-1}) - q\beta_n\gamma_n - \Pi_\Pi\gamma_n^2] = \mu(\delta_{n-1}\gamma_n - \beta_n\varepsilon_{n-1}),$$

d'où l'indéterminée μ en fonction de λ.

Dans ces conditions, l'équation (4) s'écrit

$$(az+b)(cz+d)(V_nV_n' - U_nV_n') - (pz+q)U_nV_n - \Pi(z)V_n^2$$
$$= U_nV_{n+1} - U_{n+1}V_n$$

ou

$$[(az+b)(cz+d)V_n' + V_{n+1}]U_n$$
$$= [(az+b)(cz+d)U_n' - (pz+q)U_n - \Pi V_n + U_{n+1}]V_n$$

ou encore, Ω_n étant une indéterminée,

$$[(az+b)(cz+d)V_n' - \Omega_nV_n + V_{n+1}]U_n$$
$$= [(az+b)(cz+d)U_n' - \Omega_nU_n - (pz+q)U_n - \Pi V_n + U_{n+1}]V_n,$$

et se décompose en les deux suivantes

(8) $(az+b)(cz+d)V_n' = \Omega_nV_n - V_{n+1}$,

(9) $(az+b)(cz+d)U_n' = \Pi V_n + (pz+q+\Omega_n)V_n - U_{n+1}$,

où Ω_n est, par raison d'homogénéité, du 1[er] degré en z.

Dérivant l'équation (8), il vient

$$(az+b)(cz+d)V_n'' = -(2acz+bc+ad)V_n' + \Omega_n'V_n + \Omega_nV_n' - V_{n+1}',$$

et (6) devient

$$(pz+q+\Omega_n)V_n' - V_{n+1}' + \{\Omega_n' - [ac(1+n)+p]n\}V_n = 0.$$

Éliminant V_n' entre cette équation et l'équation (8), on aura

$$(pz+q+\Omega_n)(\Omega_nV_n - V_{n+1}) - (\Omega_{n+1}V_{n+1} - V_{n+2})$$
$$+ (az+b)(cz+d)\{\Omega_n' - [ac(1+n)+p]n\}V_n = 0$$

ou

$$V_{n+2} - [pz+q+\Omega_n+\Omega_{n+1}]V_{n+1}$$
$$+\{(pz+q+\Omega_n)\Omega_n + (az+b)(cz+d)\Omega_n' - [ac(1+n)+p]n\}V_n = 0.$$

Comparant aux relations (7), il vient

(10) $Q_n = pz + q + \Omega_n + \Omega_{n+1}$,

(11) $P_n = (pz+q+\Omega_n)\Omega_n+(az+b)(cz+d)\{\Omega'_n-[ac(1+n)+p]n\}$.

Les relations de récurrence (7) seront déterminées une fois le polynôme du premier degré Ω_n déterminé lui-même.

30. Laguerre pose à cet effet

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{(az+b)(cz+d)} dz},$$

d'où

$$\Omega_n = (az+b)(cz+d)\frac{u'}{u}$$

et, substituant dans l'équation (11), il vient

$$[pz+q+(az+b)(cz+d)](az+b)(cz+d)\frac{u'}{u}$$

$$+(az+b)(cz+d)\left[(2acz+ad+bc)\frac{u'}{u}+(az+b)(cz+d)\frac{uu''-u'^2}{u^2}\right]-P_n=0$$

ou

$$(pz+q)(az+b)(cz+d)\frac{u'}{u}+(az+b)(cz+d)$$
$$\left\{(2acz+ad+bc)\frac{u'}{u}+(az+b)(cz+d)\frac{u''}{u}-n[(n+1)ac+p]\right\}-P_n=0$$

ou encore

(12) $$(az+b)(cz+d)u''+[(2ac+p)z+ad+bc+q]u'$$
$$-\left\{n[(n+1)ac+p]+\frac{P_n}{(az+b)(cz+d)}\right\}u=0;$$

Ω_n étant un polynôme du 1^er^ degré, posons

$$\frac{\Omega_n}{(az+b)(cz+d)}=\frac{a\alpha}{az+b}+\frac{b\beta}{cz+d};$$

déterminer le polynôme Ω_n reviendra à déterminer les constantes α, β.

D'ailleurs cette relation conduit à celle-ci :

$$u = e^{\log(az+b)^{\alpha}(cz+b)^{\beta}} = (az+b)^{\alpha}(cz+d)^{\beta}$$

et si l'on exprime que u vérifie identiquement l'équation (12) on aura 3 équations déterminant α, β, P_n, d'où

$$\Omega_n = (\alpha+\beta)acz+a\alpha d+c\beta b$$

et enfin, vu l'équation (10),

(12^{bis}) $Q_n = pz+q+\Omega_n+\Omega_{n+1}$.

31. Voici le développement des calculs.

Si $W = (az + b)(cz + d)$, on a posé

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz}$$

et l'équation (12) s'écrit

$$(13) \qquad Wu'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n}{W}\right) u = 0,$$

où

$$W_0 = (2ac + p)z + bc + ad + q,$$
$$W_1 = -[ac(1+n) + p]n.$$

On a donc

$$u' = \frac{\Omega_n}{W} e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz}, \quad u'' = \left(\frac{\Omega_n}{W}\right)^2 e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz} + \left(\frac{d}{dz} \cdot \frac{\Omega_n}{W}\right) e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dz}$$

et, portant dans (13),

$$W\left[\left(\frac{\Omega_n}{W}\right)^2 + \frac{d}{dz} \cdot \frac{\Omega_n}{W}\right] + W_0 \frac{\Omega_n}{W} + W_1 - \frac{P_n}{W} = 0$$

$$W^2\left(\frac{\Omega_n^2}{W^2} + \frac{W\Omega_n' - \Omega_n W'}{W^2}\right) + W_0 \Omega_n + W_1 W - P_n = 0$$

$$(14) \qquad \Omega_n^2 + W\Omega_n' - W'\Omega_n + W_0\Omega_n + WW_1 - P_n = 0;$$

or,

$$(15) \qquad \Omega_n = (\alpha + \beta)acz + a\alpha d + c\beta b = \gamma z + \delta,$$

en écrivant $ac(\alpha + \beta) = \gamma$, $a\alpha d + c\beta b = \delta$ et (14) devient ainsi

$$\begin{aligned}(\gamma z + \delta)^2 + (az + b)(cz + d)\gamma - (2acz + bc + ad)(\gamma z + \delta) \\ + [(2ac + p)z + bc + ad + q](\gamma z + \delta) \\ - (az + b)(cz + d)[ac(1+n) + p]n - P_n = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(\gamma z + \delta)^2 + (az + b)(cz + d)\gamma + (pz + q)(\gamma z + \delta)^n \\ - (az + b)(cz + d)[ac(1+n) + p]n - P_n = 0.\end{aligned}$$

Cette équation devant être identiquement vérifiée, il s'ensuit qu'on doit avoir simultanément

$$(16) \qquad \gamma^2 + ac\gamma + p\gamma - ac[ac(1+n) + p]n = 0,$$

$$(17) \quad 2\gamma\delta + (ad + bc)\gamma + p\delta + q\gamma - (ad + bc)[ac(1+n) + p]n = 0$$

$$(18) \qquad \delta^2 + b\delta\gamma + q\delta - bd[ac(1+n) + p]n - P_n = 0.$$

On tire de (16)

$$\gamma = \frac{-(ac + p) \pm (ac + p + 2acn)}{2},$$

d'où les deux valeurs suivantes de γ:

$$\gamma_1 = acn, \qquad \gamma_2 = -(ac + p + acn).$$

Si $\gamma = acn$, l'équation (17) donne

$$\delta = \frac{(ad + bc)(acn + p) - qac}{2acn + p}$$

et l'équation (18) donne, après un calcul assez long mais qui n'offre aucune difficulté,

$$P_n = \frac{n(nac + p)[n(ad - bc)a - bp + aq][n(ad - bc)c - cq + pd]}{[2nac + p]^2}.$$

L'équation (15) donne alors

$$\Omega_n = acnz + \frac{(ad + bc)(acn + p) - qac}{2nac + p} n,$$

d'où (12^{bis})

$$Q_n = \{(2nac + p)[2ac(n + 1) + p]z + (ad + bc)[2n^2ac + 2(ac + p)n + p] + pq\} \times$$
$$\times \frac{(2n + 1)ac + p}{(2nac + p)[2(n + 1)ac + p]}.$$

Si $\gamma = -(ac + p + acn)$, on est conduit aux mêmes valeurs de P_n et Q_n.

Ainsi, les termes des réduites $\frac{U_n}{V_n}$ de la fraction continue développement de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$(az + b)(cz + d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz + q)Z(z) + \Pi(z),$$

vérifient la relation de récurrence

$$U_{n+1} - Q_{n-1} U_n + P_{n-1} U_{n-1} = 0,$$
$$V_{n+1} - Q_{n-1} V_n + P_{n-1} V_{n-1} = 0,$$

où

$$P_n = \frac{n(nac + p)[n(ad - bc)a - bp + aq][n(ad - bc)c - cq + pd]}{(2nac + p)^2}$$

$$Q_n = \{(2nac + p)[2ac(n + 1) + p]z + (ad + bc)[2n^2ac + 2(ac + p)n + p] + pq \times$$
$$\times \frac{(2n + 1)ac + p}{(2nac + p)[2(n + 1)ac + p]}.$$

Dans le cas où $p = 0$, les quantités P_n, Q_n prennent une forme beaucoup plus simple:

$$P_n = \left(n\frac{ad - bc}{2} + \frac{q}{2}\right)\left(n\frac{ad - bc}{2} - \frac{q}{2}\right),$$
$$Q_n = (2n + 1)\left(acz + \frac{ad + bc}{2}\right).$$

On remarquera que, d'après la marche des calculs, si

$$U_{n,1} = S_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_n z^n,$$
$$V_{n,1} = 1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots + \gamma_n z^n,$$

les polynômes U_n, V_n donnés par les relations de récurrence seront les produits de $U_{n,1}$, $V_{n,1}$ par un facteur constant :

$$U_n = \lambda . U_{n,1}, \qquad V_n = \lambda . V_{n,1}.$$

Comme $\dfrac{U_n}{V_n} = \dfrac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$, cela n'offre aucun inconvénient.

II. — Étude de la convergence du développement précédent dans le cas où $p = 0$.

Nous montrerons que le cas général rentre dans un cas plus étendu encore, dont nous ferons plus loin l'étude (Ch. III).

32. Posant $ac = P$, $ad + bc = 2Q$, $ad - bc = 2R$, $q = 2\omega$, les relations de récurrence s'écrivent

$$(1)\quad \begin{cases} U_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)U_n + (nR+\omega)(nR-\omega)U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)V_n + (nR+\omega)(nR-\omega)V_{n-1} = 0. \end{cases}$$

La suite $\dfrac{U_0}{V_0}, \dfrac{U_1}{V_1}, \dfrac{U_2}{V_2}, \ldots$ converge ou diverge en même temps que la série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots + \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$
$$+ \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) + \cdots.$$

Étudions le rapport

$$R_n = \frac{\dfrac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \dfrac{U_n}{V_n}}{\dfrac{U_n}{V_n} - \dfrac{U_{n-1}}{V_{n-1}}} = \frac{U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1}}{U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}.$$

Éliminant $(2n+1)(Pz+Q)$ entre les relations de récurrence, il vient

$$U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1} = (nR+\omega)(nR-\omega)(U_nV_{n-1} - U_{n-1}V_n),$$

d'où

$$R_n = (nR+\omega)(nR-\omega)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}.$$

Si l'on pose

$$V_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}(nR - \omega)V_{n-1},$$

R_n devient

$$R_n = \frac{nR + \omega}{(n+1)R - \omega} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}};$$

d'ailleurs

(2) $[(n+1)R - \omega]u_{n+1} - (2n+1)(Pz + Q)u_n + (nR + \omega)u_{n-1} = 0.$

Or, la fonction $Y(z, \alpha)$

$$Y(z, \alpha) = u_0 + u_1\alpha + v_2\alpha^2 + v_3\alpha^3 + \cdots + v_n\alpha^n$$

$$= \alpha^{\frac{\omega}{R}}[R - 2(Pz+Q)\alpha + R\alpha^2]^{-\frac{2\omega+R}{2R}} \int \frac{(a_0 + a_1\alpha)d\alpha}{\alpha^{1+\frac{\omega}{R}}[R - 2(Pz+Q)\alpha + R\alpha^2]^{1-\frac{2\omega+R}{2R}}},$$

où les arbitraires a_0, a_1 ont été choisis de manière que les coefficients des termes en α^0, α^1 du développement soient précisément u_0, u_1, vérifie l'équation différentielle

$$[R\alpha - 2(Pz+Q)\alpha^2 + R\alpha^3]\frac{dY}{d\alpha} + [-\omega - (Pz+Q)\alpha + (R+\omega)\alpha^2]Y = a_0 + a_1\alpha.$$

Si l'on dérive $n+1$ fois par rapport à α cette relation, on obtient, en substituant $m!\,v_m$ à $\frac{d^m Y}{d\alpha^m}$,

$$[(n+1)R - \omega]v_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)v_n + (nR+\omega)v_{n-1} = 0;$$

la comparaison avec la relation (2) montre que (puisque $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$),

$$v_m = u_m$$

quelque soit m.

Pour une valeur déterminée de z, la fonction $Y(z, \alpha)$

$$Y(z, \alpha) = \alpha^{\frac{\omega}{R}}[R - 2(Pz + Q)\alpha + R\alpha^2]^{-\frac{2\omega+R}{2R}} \times$$

$$\times \int \frac{(a_0 + a_1\alpha)\,d\alpha}{\alpha^{1+\frac{\omega}{R}}[R - 2(Pz + Q)\alpha + R\alpha^2]^{1-\frac{2\omega+R}{2R}}}$$

admet un développement

$$v_0 + v_1\alpha + u_2\alpha^2 + u_3\alpha^3 + \cdots + u_n\alpha^n + \cdots$$

valable dans un cercle ayant pour centre le point $\alpha = 0$ et passant par le point singulier α_i, le plus proche du point $\alpha = 0$.

Or la fonction admet les deux points singuliers α_1, α_2 racines de l'équation

(3) $$R\alpha^2 - 2(Pz + Q)\alpha + R = 0.$$

Si les modules de ces racines sont différents l'un de l'autre ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$) un seul point singulier α_1 sera sur le cercle de convergence et le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ tendra vers α_1. Donc, en ce cas,

$$\lim \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = |\alpha_1| < |\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}|$$

et par suite

$$\lim \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| < 1,$$

puisque $\alpha_1 \alpha_2 = 1$.

Alors

$$|R_n| = \left|\frac{nR + \omega}{(n+1)R - \omega}\right| \times \left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right| \times \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|$$

tend vers une *limite moindre que un* et la suite des *réduites converge.*

33. Il ne peut y avoir divergence que si les modules des racines α_1, α_2 de l'équation (3) sont égaux, car ils sont alors égaux à *un* et $|R_n|$ tend vers *un.*

Si les modules des racines de l'équation (3) *sont égaux, il y a divergence.*

Un calcul facile montre que l'identité des modules a lieu sous condition que le point z soit sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

En effet, si l'équation (3) admet la racine $\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha'_2 i$, elle admettra la racine

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha'_1 + \alpha'_2 i} = \frac{\alpha'_1 - \alpha'_2 i}{\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2}$$

et, les modules devant être égaux,

$$\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2 = \frac{\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2}{(\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2)^2},$$

d'où

$$\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \alpha'_1 - \alpha'_2 i,$$

d'où encore

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha'_1.$$

Soit

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2(Pz + Q)}{R} = 2H(x, y) + 2iK(x, y);$$

la condition précédente nécessitera que

$$K = 0.$$

D'ailleurs
$$\alpha = -H \pm \sqrt{H^2 - 1}$$
nécessite de plus que
$$|H| \leqq 1,$$
soit dans le cas présent
$$z = x + iy, \quad R = \rho_1 + \rho_2 i, \quad P = \Pi_1 + \Pi_2 i, \quad Q = \chi_1 + \chi_2 i;$$
on aura :
$$\frac{2(Pz + Q)}{R} = 2\frac{(\Pi_1 + \Pi_2 i)(x + iy) + \chi_1 + \chi_2 i}{\rho_1 + \rho_2 i}$$
$$\frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_2 x + \Pi_1 y + \chi_2)\rho_2 + i[-(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_2 + (\Pi_2 x + \Pi_1 y + \chi_2)\rho_1]}{\rho_1^2 + \rho_2^2}.$$
et les conditions d'identité des modules s'écrivent
$$\frac{\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1}{\rho_1} = \frac{\Pi_1 y + \Pi_2 x + \chi_2}{\rho_2}$$
$$= \left[\frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_1 y + \Pi_2 x + \chi_1)\rho^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2}\right]$$
$$-1 \leqq \frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_2 x - \Pi_1 y + \chi_2)\rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \leqq 1,$$
conditions qui deviennent
$$\frac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)x - (a_2 c_1 + a_1 c_2)y + a_1 d_1 - a_2 d_2}{a_1 d_1 - a_2 d_2 - b_1 c_1 + b_2 c_2}$$
$$= \frac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)y + (a_2 c_1 + a_1 c_2)x + a_1 d_2 + a_2 d_1}{a_1 d_1 + a_2 d_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{\delta + 1}{2}$$
avec
$$-1 < \delta < 1,$$
si
$$a = a_1 + a_2 i, \quad b = b_1 + b_2 i, \cdots$$
Ces conditions supposent bien que le point z est sur le segment rectiligne joignant les deux points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

D'ailleurs, il y a ordinairement divergence sur ce segment, car les points en question sont ordinairement points singuliers de la fonction représentée par le développement en fraction continue que nous étudions.

34. Cette fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle
$$(az + b)(cz + d)\frac{d.Z(z)}{dz} = q.Z(z) + \Pi(z)$$

est de la forme

$$Z(z)=(az+b)^{-\frac{q}{bc-ad}}(cz+d)^{\frac{q}{bc-ad}}\int\frac{\Pi(z)\,dz}{(az+b)^{1-\frac{q}{ad-bc}}(cz+d)^{1+\frac{q}{bc-ad}}}.$$

1° Si $\Pi(z)$ est nul,

$$Z(z)=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\frac{q}{ad-bc}}$$

et les relations de récurrence subsistent :

$$U_{n+1}-(2n-1)\left(acz+\frac{ad+bc}{2}\right)U_n+\frac{ad-bc}{4}\left[(n-1)^2-\frac{q^2}{4}\right]U_{n-1}=0,$$

$$V_{n+1}-(2n-1)\left(acz+\frac{ad+bc}{2}\right)V_n+\frac{ad-bc}{4}\left[(n-1)^2-\frac{q^2}{4}\right]V_{n-1}=0.$$

Les points critiques sont alors *algébriques*.

2° Si l'équation différentielle est de la forme particulière

$$(az+b)(cz+d)\frac{d\cdot Z(z)}{dz}=k,\qquad (q=0),$$

d'où

$$Z(z)=\frac{k}{ad-bc}\log\frac{dz+b}{cz+d}=\frac{k}{bc-ad}\log\frac{cz+d}{az+b},$$

les relations de récurrence subsistent encore et s'écrivent

$$U_{n+1}+(2n+1)(Pz+Q)\,U_n+n^2R^2\,U_{n-1}=0,$$

$$V_{n+1}+(2n+1)(Pz+Q)\,V_n+n^2R^2\,V_{n-1}=0.$$

Ici les points critiques sont *logarithmiques*.

Dans l'un et l'autre cas, la convergence est assurée en dehors du segment rectiligne joignant les deux points singuliers.

Le prolongement de la fonction par la fraction continue n'est donc pas essentiellement arrêté par les points singuliers qui sont critiques algébriques ou critiques logarithmiques.

Nous aurions ici à examiner le cas des fonctions vérifiant l'équation différentielle

$$(az+b)\frac{d.Z(z)}{dz}=q.Z(z)+\Pi(z).$$

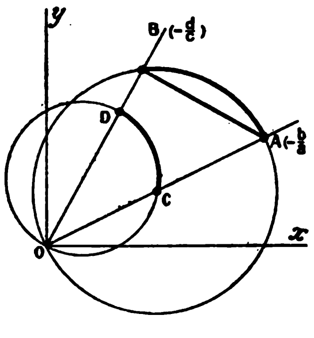
Nous ferons cette étude après l'exposé de la théorie générale.

III. — Extension des résultats précédents aux fractions continues de M. Padé, qui correspondent au cas particulier étudié.

35. Comme on l'a vu, si les réduites obtenues se rapportent à la fonction $Z(z)$, les réduites complémentaires $\frac{U_n}{V_n}$ vérifiant la relation de récurrence

$$U_{n+1} + (2n+1)(P+Qz)\,U_n + (nR+\omega)(nR-\omega)z^2\,U_{n-1} = 0,$$
$$V_{n+1} + (2n+1)(P+Qz)\,V_n + (nR+\omega)(nR-\omega)z^2\,V_{n-1} = 0,$$

se rapporteront à la fonction $Z\left(\frac{1}{z}\right) = Z_1(z)$ et convergeront dans tout le plan, sauf sur l'arc de cercle CD, *transformé par rayons vecteurs réciproques du segment rectiligne* AB.



(Fig. 1).

En particulier soit

$$Z(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\omega},$$

d'où

$$Z\left(\frac{1}{z}\right) = Z(z) = \left(\frac{d+bz}{c+dz}\right)^{\omega}.$$

Le premier développement, celui qu'on a étudié, est valable pour tous les points du plan, sauf le segment AB. Le développement *complémentaire*, développement de la fonction $\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{\omega}$ est valable en tous les points du plan, sauf sur le segment CD.

Le développement *complémentaire* de $Z(z)$, où l'on a échangé a et b, c et d, représente donc, comme le premier, le développement de

$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\omega}$, mais est valable, lui, dans tout plan, sauf sur *l'arc de cercle AB*.

Nous avons donc deux développements de la fonction, l'un divergeant sur le segment rectiligne AB seul, l'autre divergeant sur l'arc de cercle AB seul. Ainsi la fonction est représentée par l'un au moins de ces développements en un point quelconque du plan.

CHAPITRE III.

Étude de la convergence d'une suite de fractions rationnelles $\frac{U_p}{V_0}, \frac{U_{p+1}}{V_1}, \frac{U_{p+2}}{V_2}, \ldots, \frac{U_{p+n}}{V_n}$, où les polynômes U, V sont définis par des relations de récurrence de l'une des formes:

$$\begin{cases} A_h U_{p+m+1} + B_{h+1} U_{p+m} + \Pi(m) A_h U_{p+m-1} = 0, \\ A_h V_{m+1} + B_{h+1} V_m + \Pi(m) A_h V_{m-1} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_h U_{m+1} + B_{h+1} U_m + \Pi(m) A_h U_{m-1} = 0, \\ A_h U_{q+m+1} + B_{h+1} U_{q+m} + \Pi(m) A_h V_{m-1} = 0, \end{cases}$$

A_h, B_{h+1} étant des polynômes en z de degrés respectifs h et $h+1$, et A_h, B_{h+1}, $\Pi(m)$ étant fonctions de m.

Nous supposerons même que $\Pi(m)$ est un polynôme en m. Le cas où $\Pi(m)$ est une fraction rationnelle se ramène aisément à celui-ci, comme on le verra à propos des développements de LAGUERRE.

I. — Préliminaires.

36. Dans l'un et l'autre cas, nous avons à considérer une série de la forme

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \cdots + \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right) + \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{U_n}{V_n}\right) + \cdots$$

et le rapport

$$R_n = \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{U_n}{V_n}\right) : \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{U_{n+1}V_n - U_n V_{n+1}}{U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n} \times \frac{V_n V_{n-1}}{V_{n+1} V_n} = \Pi(n) \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n},$$

où

(1) $$A_h V_{n+1} + B_{h+1} V_n + \Pi(n) A_h V_{n-1} = 0.$$

On peut écrire

$$R_n = \left[\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right]\left[\sqrt{\Pi(n-1)}\frac{V_{n-1}}{V_n}\right] \times \frac{\sqrt{\Pi(n)}}{\sqrt{\Pi(n-1)}}$$

et (1) peut se mettre sous la forme

$$\Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n} + \frac{B_{h+1}}{A_h} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} + 1 = 0$$

ou

$$\frac{\sqrt{\Pi(n)}}{\sqrt{\Pi(n-1)}}\left[\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right]\left[\sqrt{\Pi(n-1)}\frac{V_{n-1}}{V_n}\right] + \frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}} \times \left[\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}\right] + 1 = 0.$$

Si $\sqrt{\Pi(n)}\frac{V_n}{V_{n+1}}$ tend vers une limite L (et alors R_n tend vers la limite L^2), on a

$$L^2 + \lim_{n=\infty} \frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}} L + 1 = 0.$$

Trois cas sont à examiner :

I. $\frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers une limite déterminée,

II. $\frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers zéro,

III. $\frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini,

car nous excluons le cas où $\frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ n'aurait aucune limite.

II. — Premier cas.

37. Si $\frac{B_{h+1}}{A_h\sqrt{\Pi(n)}}$ *tend vers une limite déterminée,* nous admettrons que B sont, comme Π, des polynômes, mais polynômes en z et n.

I. A_h et B_{h+1} *sont d'un même degré* k *en* n : Alors $\Pi(n)$ se réduit à une constante ω,

$$R_n = \omega \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}$$

et (1) devient, en écrivant $A_k(n)$ pour A_n, $B_k(n)$ pour B_n,

$$(2)\qquad A_k(n)\,V_{n+1} + B_k(n)\,V_n + \omega\,A_k(n)\,V_{n-1} = 0.$$

Considérons une équation différentielle de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha^k[a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2]\dfrac{d^pZ(z,\alpha)}{d\alpha^p}+\alpha^{k-1}[b_1+b_2\alpha+b_3\alpha^2]\dfrac{d^{p-1}Z(z,\alpha)}{d\alpha^{p-1}}+\cdots \\ \cdots+\alpha[c_1+c_2\alpha+c_3\alpha^2]\dfrac{dZ(z,\alpha)}{d\alpha}+[d_1+d_2\alpha+d_3\alpha^2]Z(z,\alpha)=\sigma_0+\sigma_1\alpha, \end{array}\right.$$

où a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, ..., d_3, σ_0, σ_1 sont des fonctions de z, Z étant fonction de z et de α.

La fonction

$$(4)\qquad Z(z,\alpha) = S_0 + S_1\alpha + S_2\alpha^2 + \cdots + S_n\alpha^n + \cdots$$

vérifiera cette équation si la série du second membre converge et si pour $m > 1$ on a

$$\left[a_1\frac{m!}{(m-k)!}+b_1\frac{m!}{(m-k+1)!}+\cdots+c_1\frac{m!}{(m-1)!}+d_1\frac{m!}{m!}\right]S_m$$
$$+\left[a_2\frac{(m-1)!}{(m-k-1)!}+b_2\frac{(m-1)!}{(m-k)!}+\cdots+c_2\frac{(m-1)!}{(m-2)!}+d_2\frac{(m-1)!}{(m-1)!}\right]S_{m-1}$$
$$+\left[a_3\frac{(m-2)!}{(m-k-2)!}+b_3\frac{(m-2)!}{(m-k-1)!}+\cdots+c_3\frac{(m-2)!}{(m-3)!}+d_3\frac{(m-2)!}{(m-2)!}\right]S_{m-2}=0.$$

Déterminons les polynômes en z $(a, b, c, \ldots)$, de manière que, *quelque soit m*, on ait

$$a_1\frac{m!}{(m-k)!}+b_1\frac{m!}{(m-k+1)!}+\cdots+c_1\frac{m!}{(m-1)!}+d_1\frac{m!}{m!}=A_k(m-1),$$
$$a_2\frac{(m-1)!}{(m-k-1)!}+b_2\frac{(m-1)!}{(m-k)!}+\cdots+c_2\frac{(m-1)!}{(m-2)!}+d_2\frac{(m-1)!}{(m-1)!}=B_k(m-1),$$
$$a_3\frac{(m-2)!}{(m-k-2)!}+b_3\frac{(m-2)!}{(m-k-1)!}+\cdots+c_3\frac{(m-2)!}{(m-3)!}+d_3\frac{(m-2)!}{(m-2)!}=\omega.A_k(m-1);$$

les quantités S_m vérifieront la loi de récurrence

$$(5)\quad A_k(m-1)\,S_m+B_k(m-1)\,S_{m-1}+\omega\,.\,A_k(m-1)\,S_{m-2}=0\quad(m>1).$$

Si de plus on détermine σ_0, σ_1, de manière que

$$(6)\qquad S_0 = V_0,\qquad S_1 = V_1,$$

on aura, *quelque soit l'indice m*, comme le montre le rapprochement des relations (2), (5), (6),

$$S_m = V_m,$$

d'où

$$\frac{V_n}{U_{n+1}} = \frac{S_n}{S_{n+1}}.$$

Or, on sait que l'équation différentielle (3) admet une solution analytique (4) convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre, le rayon de ce cercle étant égal au module de la racine de moindre module α_1 de l'équation

$$(7) \qquad a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 = 0,$$

cela sauf cas exceptionnels.

Donc,

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{S_n}{S_{n+1}}\right| = L,$$

où L est la limite du module de la racine α_1.

Si

$$A_k(m) = Am_k + A_1 m^{k-1} + \cdots,$$
$$B_k(m) = Bm^k + B_1 m^{k-1} + \cdots,$$

où A, A_1, B, B_1, ... sont des fonctions de z,

$$a_1 = A, \qquad a_2 = B, \qquad a_3 = \omega A$$

et l'équation (7) s'écrit

$$(8) \qquad \omega A\alpha^2 + B\alpha + A = 0.$$

Si les modules des racines α_1, α_2 sont inégaux ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$),

$$\lim R = \omega \lim\left(\frac{V_n}{V_{n+1}}\right)^2 = \omega\alpha_1^2 < \omega\alpha_1\alpha_2,$$

quantité dont le module est un, puisque

$$\omega\alpha_1\alpha_2 = \omega \times \frac{A}{\omega A} = 1;$$

donc

$$\lim |R| < 1$$

et il y a convergence.

Si les modules des racines α_1, α_2 sont égaux,

$$\lim |R| = 1$$

et il y a doute quant à la convergence.

L'équation (8) peut d'ailleurs s'écrire

$$(\sqrt{\omega}\,\alpha)^2 + \frac{B}{A\sqrt{\omega}}(\sqrt{\omega}\,\alpha) + 1 = 0,$$

ce qui montre que si les modules des racines de l'équation (8) sont égaux, il en sera de même des modules des racines de l'équation

$$\beta^2 + \frac{B}{A\sqrt{\omega}}\beta + 1 = 0,$$

comme il est facile de le reconnaître.

38. II. *Cas général.* — Le cas général se ramène comme il suit au cas précédent.

Si $\frac{B_{k+1}}{A_k\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers une limite déterminée et si A_k, B_{k+1} sont respectivement de degrés m et k en n, $\Pi(n)$ sera de degré $2(R-m)$.

Ainsi, nous avons à déterminer la limite de

$$\Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n},$$

sachant que les polynômes V sont liés par une relation de récurrence

$$A_m(n)\,V_{n-1} + B_k(n)V_n + \Pi_{2(k-m)}(n)A_m(n)\,V_{n-1} = 0.$$

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_{k-m}$, $k-m$ racines quelconques de l'équation $\Pi_{2(k-m)}(n) = 0$, en sorte que

$$\Pi_{2(k-m)}(n) = \omega(n-n_1)(n-n_2)\cdots(n-n_{k-m})\Pi'_{k-m}(n).$$

Posons

$$\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{U_n}{U_{n+1}} \times \frac{1}{n-n_1} \times \frac{1}{n-n_2} \times \cdots \times \frac{1}{n-n_{k-m}}.$$

Nous aurons à étudier la limite de

$$\frac{\omega\,\Pi'(n)}{(n-n_1-1)(n-n_2-1)\cdots(n-n_k-1)} \times \frac{U_n}{U_{n+1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_n}$$

ou simplement de

$$\omega\frac{U_n}{U_{n+1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_n},$$

puisque $\Pi'(n)$ est un polynôme en n de degré $k-m$.

Or, la relation de récurrence peut s'écrire

$$\Pi_{2(k-m)}(n)A_m(n)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n} + B_k(n)\frac{V_n}{V_{n+1}} + A_m(n) = 0$$

ou

$$\Pi_{2(k-m)}(n)A_m(n)\frac{U_n}{U_{n+1}}\cdot\frac{1}{n-n_1}\cdot\frac{1}{n-n_2}\cdots\frac{1}{n-n_{k-m}}\times$$
$$\times\frac{U_{n+1}}{U_n}\times\frac{1}{n-n_1-1}\times\frac{1}{n-n_2-1}\times\cdots+\frac{1}{n-n_{k-m}-1}$$
$$+B_k(n)\frac{U_n}{U_{n+1}}\times\frac{1}{(n-n_1)(n-n_2)\cdots(n-n_{k-m})}$$

ou encore

$$\Pi_{2(k-m)}(n)\times A_m(n)u_{n-1}+B_k(n)(n-n_1-1)(n-n_2-2)\cdots(n-n_{k-m}-1)u_n$$
$$+A_m(n)\times(n-n_1)(n-n_2)\cdots(n-n_{k-m})(n-n_1-1)\cdots(n-n_{k-m}-1)\cdots u_{n+1}=0$$

et les coefficients de u_{n-1}, u_n, u_{n+1} sont d'un même degré en n, de degré $2k-m$.

On est ainsi ramené au cas précédent.

39. La convergence a lieu en tous les points du plan où les modules des racines d'une équation

$$\beta^2+\frac{B}{A\sqrt{\omega}}\beta+1=0,$$

que nous écrirons

$$\beta^2-2[P(x,y)+iQ(x,y)]\beta+1=0,$$

sont inégaux, ce qui suppose que

$$Q=0, \qquad -1<P<1.$$

Divers cas peuvent se présenter. Les régions de divergence peuvent être de simples arcs ; elles peuvent être formées de une ou plusieurs courbes fermées ou non.

Elles peuvent ne pas exister.

III. — Second et troisième cas.

40. $\dfrac{B_{k+1}}{A_k\sqrt{\Pi(n)}}$ *tend vers zéro* : ici $|L|=1$ et nous ne pouvons rien dire sur la divergence ou la convergence. Parfois, l'application des règles connues relativement aux séries donnera la solution de la question. Mais *on ne saurait énoncer aucune proposition générale.*

En fait, la fonction

$$F(z,X)=\frac{U_0}{V_0}+\left(\frac{U_1}{V_1}-\frac{U_0}{V_0}\right)X+\left(\frac{U_2}{V_2}-\frac{U_1}{V_1}\right)X^2+\cdots$$

a, quelque soit z, un ou plusieurs points singuliers sur le cercle de rayon *un* tracé dans le plan de la variable X et il y aurait lieu d'étudier l'allure de la fonction sur ce cercle.

41. $\dfrac{B_{k+1}}{A_k\sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini.

Si B_{b+1} et A_b sont des polynômes en n, les raisonnements qui ont été faits pour le premier cas sont applicables.

IV. — Applioations.

42. Nous étudierons ici le *cas général* du développement en fraction continue de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(az+b)(cz+d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z).$$

Nous avons ici (§ 31)

$$A_b U_{n+1} + B_{b+1} U_n + \Pi(n) A_b U_{n-1} = 0$$
$$A_b V_{n+1} + B_{b+1} V_n + \Pi(n) A_b V_{n-1} = 0$$

avec

$$A_b = 1$$

$$B_{b+1} = -\{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]z + (ad+bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq\}\times$$
$$\times\frac{(2n+1)ac+p}{[2(n+1)ac+p][2nac+p]}$$

$$\Pi(n) = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a-bp+aq][n(ad-bc)cn-cq+pd]}{(2nac+p)^2}$$

et, comme nous allons le voir, ce cas se ramène facilement à celui où $\Pi(n)$ est un polynôme.

Nous avons à etudier le rapport

$$R_n = \Pi(n)\frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}.$$

Posons

$$B_{b+1} = [P(n-n_1)(n-n_2)z + Q(n-n_3)(n-n_4)]\frac{M(n-n_5)}{S(n-n_1)(n-n_2)},$$

$$\Pi(n) = \frac{N_n(n-n_6)(n-n_7)(n-n_8)}{(n-n_2)^2},$$

$$P = 4a^2c^2,$$

$$Q = 2ac(ad+bc),$$

$$M = -2ac,$$

$$S = 4a^2c^2,$$

$$N = \left(\frac{ad-bc}{2}\right)^2, \qquad n\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{U_n}{U_{n+1}},$$

d'où

$$V_{n+1} + B_{n+1}V_n + \Pi(n)V_{n-1} = 0;$$

on aura

$$R_n = \frac{N(n-n_6)(n-n_7)(n-n_8)}{(n-n_2)^2(n-1)} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et la relation de récurrence s'écrit

$$\Pi(n)\frac{V_{n-1}}{V_n} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} + B_{k+1}\frac{V_n}{V_{n+1}} + 1 = 0.$$

Posons encore

$$\frac{ad-bc}{2}\cdot\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{w_n}{w_{n+1}};$$

R_n devient, en négligeant la partie qui tend vers *un*,

$$R_n = \frac{w_n}{w_{n+1}} \times \frac{w_{n-1}}{w_n}$$

et la relation de récurrence prend la forme

$$\left.\begin{array}{l}(ad-bc)(n-n_6)(n-n_7)(n-n_8)(n-n_1)nw_{n-1}\\ -2[2ac(n-n_1)(n-n_2)z+(ad+bc)(n-n_3)(n-n_4)](n-n_5)(n-n_2)(n-1)w_n\\ +(ad-bc)(n-n_1)^2(n-n_1)(n-1)nw_{n+1}\end{array}\right\}=0$$

et devient à la limite

$$\frac{ad-bc}{2}\alpha^2 - 2\left(acz + \frac{ad+bc}{2}\right)\alpha + \frac{ad-bc}{2} = 0,$$

relation déjà trouvé dans le cas où $p = 0$.

Le problème de la convergence est donc résolu : *il y a convergence dans tout le plan, sauf sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes* $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$.

43. Laguerre *) a donné les développements des fonctions particulières que voici :

1° $$Z(z) = e^{\operatorname{arc\,tang} z},$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$(z^2+1)\frac{d.Z(z)}{dz} = Z(z);$$

le développement converge dans tout le plan, sauf sur la coupure rectiligne joignant les points $\pm i$.

2° $$Z(z) = \log\frac{1+z}{1-z},$$

*) Laguerre, loc. cit.

qui vérifie l'équation différentielle

$$(1+z)(1-z)\frac{d.Z(z)}{dz} = 2;$$

le développement converge dans tout le plan, sauf sur la coupure joignant les points ± 1.

3°
$$Z(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\omega},$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$(1-z^2)\frac{d.Z(z)}{dz} = 2\omega.Z(z);$$

le développement converge dans tout le plan, sauf sur la coupure rectiligne joignant les points ± 1.

V. — Étude des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(az+b)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz+q)Z(z) + \Pi(z).$$

44. Cette équation est un cas particulier de l'équation étudiée par Laguerre où l'on ferait $c = 0$, $d = 1$. Mais la relation de récurrence devient

$$U_{n+1} - (pz + an + q)U_n + n(na^2 - bp + aq)U_{n-1} = 0,$$
$$V_{n+1} - (pz + an + q)V_n + n(na^2 - bp + aq)V_{n-1} = 0,$$

et nous avons à étudier le rapport

$$R = \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n} \times n(na^2 - bp + aq),$$

posant

$$an\frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

$$R = \frac{na^2 - bp + aq}{a^2(n-1)} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

et la relation entre les polynômes V_n devient

$$\frac{na^2 - bp + aq}{a^2(n-1)}u_{n-1} - \frac{pz + an + q}{a(n-1)}u_n + u_{n+1} = 0;$$

l'équation en α est ici

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0,$$

d'où $\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ et $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$: quelque soit z. *Il y a doute sur la convergence.*

45. A ces fonctions se rattache la fonction :

$$Z(z) = e^z \int_z^\infty \frac{e^{-z}dz}{z},$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$z\frac{d.Z(z)}{dz} = z.Z(z) - 1$$

et dont LAGUERRE a donné le développement.

STIELTJES a montré *) que son développement converge dans tout le plan de la variable sauf sur la coupure constituée par la partie négative réelle de l'axe des x.

CHAPITRE IV.

Étude de la convergence d'une suite de fractions rationnelles $\frac{U_{p+n}}{V_n}$, $\left(\frac{U_n}{V_{p+n}}\right)$, dont les termes vérifient l'une des relations de récurrence

$$A_h V_{p+n+1} + B_{h+1} U_{p+n} + \Pi(n) z^2 A_h U_{p+n-1} = 0,$$
$$A_h V_{n+1} + B_{h+1} V_n + \Pi(n) z^2 A_h V_{n-1} = 0,$$
$$A_h U_{n+1} + B_{h+1} U_n + \Pi(n) z^2 A_h U_{n-1} = 0,$$
$$A_h V_{q+n+1} + B_{h+1} V_{q+n} + \Pi(n) z^2 A_h V_{n-1} = 0,$$

A_h, B_{h+1} étant des polynômes z de degrés respectifs h et $h+1$, et A_h, B_{h+1}, $\Pi(n)$ étant fonctions de n **).

I. — Préliminaires.

46. Dans l'un et l'autre cas, nous avons à étudier une série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots + \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$
$$+ \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) + \cdots$$

---

*) STIELTJES, loc. cit., page 5.

**) Cf. PINCHERLE, Acta Mathematica, tome XVI.

et le rapport

$$R_n = z^2 \Pi(n) \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n},$$

où

(1) $$A_b V_{n+1} + B_{b+1} V_n + \Pi(n) z^2 A_b V_{n-1} = 0.$$

Ici,

$$R_n = \left(\sqrt{\Pi(n)}\, z \frac{V_n}{V_{n+1}}\right) \times \left(\sqrt{\Pi(n-1)}\, z \frac{V_{n-1}}{V_n}\right) \times \sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}}$$

et

$$\sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}}\left(\sqrt{\Pi(n)}\, z \frac{V_n}{V_{n+1}}\right)\left(\sqrt{\Pi(n-1)}\, z \frac{V_{n-1}}{V_n}\right) + \frac{B_{b+1}}{z\sqrt{\Pi(n)}\, A_n}\left(z\sqrt{\Pi(n)} \frac{V_n}{V_{n+1}}\right) + 1 = 0.$$

Posant

$$\sqrt{\Pi(n)}\, z \frac{V_n}{V_{n+1}} = \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

il vient

$$R_n = \sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

$$\sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{B_{b+1}}{z\sqrt{\Pi(n)}\, A_b} \times \frac{u_n}{u_{n+1}} + 1 = 0.$$

Si $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ tend vers une limite L et si $\sqrt{\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-1)}}$ tend vers *un*, R_n tend vers L^2 et l'on a

$$L^2 + \lim \frac{B_{b-1}}{z\sqrt{\Pi(n)}\, A_b} L + 1 = 0.$$

Trois cas sont à examiner :

I. $\frac{B_{b+1}}{z A_b \sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers une limite déterminée,

II. $\frac{B_{b+1}}{z A_b \sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers zéro,

III. $\frac{B_{b+1}}{z A_b \sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini.

II. — Premier cas.

47. Si $\frac{B_{k+1}}{z A_k \Pi(n)}$ tend vers une limite déterminée, nous admettrons que B et A sont des polynômes en z et n ; nous admettrons aussi que $\Pi(n)$ est un polynôme en n. Le cas où A, B, Π sont des fractions rationnelles en n se ramène sans difficulté au cas précédent, comme on le verra sur un exemple.

I. A_k et B_{k+1} sont d'un même degré k en n ; alors $\Pi(n)$ se réduit à une constante ω :

$$R_n = \omega z^2 \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n}$$

et

$$A_k(n) V_{n+1} + B_k(n) V_n + \omega z^2 A_k(n) V_{n-1} = 0.$$

L'analyse que nous avons faite à propos des *fractions complémentaires* peut se répéter mot pour mot et si

$$A_k(n) = A n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots,$$
$$B_k(n) = B m^k + B_1 m^{k-1} + \cdots,$$

on est conduit à examiner l'équation

$$\omega z^2 A \alpha^2 + B\alpha + A = 0.$$

Si les modules des racines α_1, α_2 *sont inégaux* ($|\alpha_1| < |\alpha_2|$),

$$\lim R = \omega z^2 \lim \left(\frac{V_n}{V_{n+1}}\right)^2 = \omega z^2 \alpha_1^2 < \omega z^2 \alpha_1 \alpha_2 ;$$

or

$$\omega z^2 \alpha_1 \alpha_2 = 1,$$

donc

$$\lim |R| < 1,$$

et il y a convergence.

48. *Conditions d'égalité des modules.*

L'équation en α peut s'écrire

$$(\sqrt{\omega} z \alpha)^2 + \frac{B}{A\sqrt{\omega} z}(\sqrt{\omega} z \alpha) + 1 = 0.$$

Soit

$$\frac{R}{A\sqrt{\omega}} = -2[P(x, y) + i Q(x, y)],$$

d'où

$$\frac{B}{A\sqrt{\omega} z} = -2\frac{(P+iQ)(x+iy)}{x^2+y^2} = -2\left(\frac{Px-Qy}{x^2+y^2} + i\frac{Py+Qx}{x^2+y^2}\right);$$

l'égalité des modules aura lieu sous condition que

$$Py + Qx = 0,$$

$$-1 < \frac{Px - Qy}{x^2 + y^2} < 1.$$

II. Si B_{h+1}, A_h sont respectivement de degrés m et k en n, $\Pi(n)$ sera de degré $2(k - m)$ et ce cas se ramènera au précédent, comme cela avait lieu pour les fractions complémentaires.

III. — Second et troisième cas.

49. Comme pour les fractions complémentaires, si $\frac{B_{h+1}}{A_h z \sqrt{\Pi(n)}}$ tend vers l'infini, il y a lieu de faire une étude particulière de chaque cas. Si $\frac{B_{h+1}}{A_h \Pi(n)}$ tend vers zéro, il y a doute.

IV. — Application.

50. Revenons à l'équation

$$(az + b)(cz + d)\frac{d.Z(z)}{dz} = (pz + q)Z(z) + \Pi(z)$$

et à son développement, défini par les relations de récurrence

$$A_h U_{n+1} + B_{h+1} U_n + \Pi(n) A_h U_{n-1} = 0,$$

$$A_h V_{n+1} + B_{h+1} V_n + \Pi(n) A_h V_{n-1} = 0,$$

$$A_h = 1,$$

$$B_{h+1} = -\{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]z+(ad+bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq\}\times$$

$$\times\frac{(2n+1)ac+p}{[2(n+1)ac+p][2nac+p]},$$

$$\Pi(n) = \frac{n(nac+p)[n(ad-bc)a - bp + aq][n(ad-bc)c - cq + pd]}{(2nac+p)^2}.$$

Nous savons

1° que ce développement converge dans tous le plan de la variable z, sauf sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$;

2° que les relations de récurrence

$$A_{b,1}\, U_{n+1,1} + B_{b+1,1}\, U_{n,1} + z^2\, \Pi(n) A_{b,1}\, U_{n-1,1} = 0,$$
$$A_{b,1}\, V_{n+1,1} + B_{b+1,1}\, V_{n,1} + z^2\, \Pi(n) A_{b,1}\, V_{n-1,1} = 0,$$

où

$$A_{b,1} = A_n,$$
$$B_{b+1,1} = z B_{b+1}\left(\frac{1}{z}\right) = \{(2nac+p)[2ac(n+1)+p]$$
$$+[(ad-bc)[2n^2ac+2(ac+p)n+p]+pq]z\}\frac{(2n+1)ac+p}{[2(n+1)ac+p]\times[2nac+p]},$$
$$\Pi(n) = \frac{n(nac-p)[n(ad-bc)a-bp+aq][n(ad-bc)c-cq+pd]}{(2nac+p)^2},$$

définissent des fractions $\frac{U_{n,1}}{V_{n,1}}$ représentant la fonction dans tout le plan de la variable z sauf sur la coupure circulaire joignant les points transformés de

$$z = -\frac{b}{a}, \qquad z = -\frac{d}{c}$$

par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant l'origine et la puissance étant *un*, le segment circulaire en question faisant partie d'un cercle passant par le point $z = 0$, mais ne contenant pas le point $z = 0$, ce qui le définit sans ambiguité.

51. On peut retrouver ce dernier résultat directement.

On a en effet à étudier l'équation

$$z^2\frac{ad-bc}{2}\alpha^2 - 2\left(ac + \frac{ad+bc}{2}z\right)\alpha + \frac{ad-bc}{2} = 0$$

et le rapport

$$R = z^2\frac{w_n}{w_{n+1}} \times \frac{w_{n-1}}{w_n},$$

et l'on peut leur substituer le rapport

$$R = \frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et l'équation

$$(z\alpha)^2 - 2\frac{dc + \frac{ad+bc}{2}z}{z\frac{ad+bc}{2}}(z\alpha) + 1 = 0.$$

L'égalité des modules a lieu sous condition que

$$N = 0, \qquad -1 < M < 1;$$

si

$$\frac{ac + \frac{ad+bc}{2}z}{z \times \frac{ad-bc}{2}} = M + Ni,$$

posant

$$ac = \Pi_1 + \Pi_2 i,$$
$$ad + bc = 2\chi_1 + 2\chi_2 i,$$
$$ad - bc = 2\rho_1 + 2\rho_2 i,$$

il vient

$$M = \frac{(\chi_1\rho_1 + \chi_2\rho_2)(x^2+y^2) + (\pi_1\rho_1 + \Pi_2\rho_2)x + (\pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2)y}{(x^2+y^2)(\rho_1^2+\rho_2^2)},$$

$$N = \frac{(\chi_2\rho_1 - \chi_1\rho_2)(x^2+y^2) + (\Pi_2\rho_1 - \pi_1\rho_2)x - (\pi_1\rho_1 + \Pi_2\rho_2)y}{(x^2+y^2)(\rho_1^2+\rho_2^2)}.$$

Si l'on change z en $\frac{1}{z}$, les conditions

$$-1 < M < 1, \qquad N = 0$$

deviennent

$$\frac{\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1}{\rho_1} = \frac{\Pi_1 y + \Pi_2 x + \chi_2}{\rho_2}$$

$$-1 \leqq \frac{(\Pi_1 x - \Pi_2 y + \chi_1)\rho_1 + (\Pi_2 x - \Pi_1 y + \chi_2)\rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \leqq 1;$$

conditions qui, nous l'avons vu, s'interprètent comme il suit : le point z doit être sur le segment rectiligne joignant les points d'affixes

$$-\frac{b}{a}, \qquad -\frac{d}{c};$$

donc les conditions

$$-1 < M < 1, \qquad N = 0$$

équivalent à celle-ci : *le point z doit être sur le segment circulaire transformé par rayons vecteurs réciproques du segment rectiligne précédemment considéré, le pôle de transformation étant le point $z = 0$ et le module de la transformation étant un. En ce cas, et en ce cas seulement, la fraction continue considérée divergera.*

TROISIÈME PARTIE.

EXTENSIONS DIVERSES.

52. La méthode employée aux nos 37 et 38 suppose simplement que les termes de 3 réduites consécutives

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}, \quad \frac{U_n}{V_n}, \quad \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}},$$

soient liés par des relations de récurrence

$$A(n).U_{n+1} + B(n).U_n + C(n).U_{n-1} = 0,$$
$$A(n).V_{n+1} + B(n).V_n + C(n).V_{n-1} = 0,$$

où $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ sont des polynômes en n et z qu'on suppose (n° 38) d'un même degré en n.

Si l'équation

$$A(n) + B(n).\alpha + C(n).\alpha^2 = 0$$

prend pour n infini la forme

$$A + B\alpha + C\alpha^2 = 0,$$

que nous écrirons

$$\alpha^2 - 2(p + qi)\alpha + 1 = 0,$$

il ne saurait y avoir doute sur la convergence de la fraction continue hors du cas où les modules des racines α_1, α_2 de cette équation sont égaux: ce qui suppose les relations $q = 0$, $p^2 < 1$.

53. Souvent, la région où la convergence apparaît comme douteuse est région de divergence. Nous l'avons vu à propos des fractions continues de Laguerre et nous le verrons encore à propos de la plupart des fractions que nous allons étudier.

J'observe:

1° *Que sans doute il n'existe pas plus pour les fractions continues que pour les séries des caractères absolus de convergence.*

2° *Que les aires de convergence douteuse que donne la méthode sont formées pour l'ordinaire d'arcs de courbes, ainsi que le veulent les conditions générales*

$$p^2 < 1, \qquad q = 0;$$

pour ce motif, *les fractions continues réalisent en général le prolongement analytique.*

3° Que la représentation par fractions continues introduit des coupures et renseigne par cela même sur les singularités des fonctions étudiées, ce que ne fait pas le mode de représentation le plus général connu jusqu'ici, je veux dire le développement en séries de polynômes de M. Mittag-Leffler.

54. 1° Je rappelle ici que les termes des réduites $\frac{U_n}{V_n}$ d'une fractions continue

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

vérifient les relations de récurrence

$$U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0,$$
$$V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0.$$

2° Je ferai souvent usage de l'une des transformations que voici. On a identiquement:

$$\cfrac{p}{1 + \cfrac{q}{1+r}} = p - \frac{pq}{1+q+r};$$

appliquant cette identité à la fraction continue

$$F = \cfrac{\xi}{1 + \cfrac{\xi'}{1 + \cfrac{\xi''}{1 + \ddots}}}$$

il vient

$$F = \xi - \cfrac{\xi\xi'}{1+\xi'+\xi'' - \cfrac{\xi''\xi'''}{1+\xi'''+\xi^{\mathrm{IV}} - \cfrac{\xi^{\mathrm{IV}}\xi^{\mathrm{V}}}{1+\xi^{\mathrm{V}}+\xi^{\mathrm{VI}} - \cfrac{\xi^{\mathrm{VI}}\xi^{\mathrm{VII}}}{1+\ddots}}}}$$

appliquant la même identité à la fraction continue

$$G = \cfrac{\xi'}{1 + \cfrac{\xi''}{1 + \cfrac{\xi'''}{1 + \ddots}}}$$

il vient

$$F = \frac{\xi}{1+G} = \cfrac{\xi}{1 + \xi' - \cfrac{\xi'\xi''}{1 + \xi'' + \xi''' - \cfrac{\xi'''\xi^{IV}}{1 + \xi^{IV} + \xi^{V} + \cfrac{\xi^{V}\xi^{VI}}{1 + \ddots}}}}.$$

I. — Les fractions continues de Gauss *).

55. Gauss a donné le développement

$$\log(1+z) = z \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}z}{1 + \cfrac{\frac{1}{6}z}{1 + \cfrac{\frac{2}{6}z}{1 + \cfrac{\frac{2}{10}z}{1 + \ddots}}}}}$$

où

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{2}z & a_2 = \frac{1}{6}z \\ a_3 = \frac{2}{6}z & a_4 = \frac{2}{10}z \\ a_5 = \frac{3}{10}z & a_6 = \frac{3}{14}z \\ a_7 = \frac{4}{14}z & \ldots \\ \ldots & \end{array}$$

et, en général,

$$a_n = \frac{\frac{n+1}{2}}{2n} z \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{\frac{n}{2}}{2(n+1)} z \cos \frac{2n\pi}{2},$$

$$b_n = 1;$$

cette loi n'étant pas algébrique, nous ne pouvons appliquer notre méthode.

*) Gauss, *Gesammelte Werke*, Tome III, page 125 et suiv.

Or, si $t = \dfrac{1}{z}$, on a, en général

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ddots}}}} = \cfrac{t}{t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \ddots}}}}$$

et, vu l'identité

$$t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{\lambda}} = t + a_0 - \frac{a_0 a_1}{a_1 + \lambda},$$

$$G = \cfrac{t}{t + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{t + a_1 + a_2 + \cfrac{a_2 a_3}{t + a_3 + a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{\ddots}}}},$$

d'où

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\log(1 + z) = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{2} - \cfrac{\frac{1.1}{2.6}}{t + \cfrac{1}{6} + \cfrac{2}{10} - \cfrac{\frac{2.2}{6.10}}{t + \cfrac{2}{10} + \cfrac{3}{10} - \cfrac{\frac{3}{10} + \frac{3}{14}}{\ddots}}}}; \end{aligned} \right.$$

ici,

$$a_2 = -\frac{1.1}{2.6}, \quad a_3 = -\frac{2.2}{6.10}, \quad a_4 = -\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{14}, \ldots$$

$$b_n = t + \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$U_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) U_n + \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} U_{n-1} = 0,$$

$$V_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) V_n + \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} V_{n-1} = 0.$$

Rappelons, *une fois pour toutes,* la suite des calculs.

Je considère la série

$$\frac{U_0}{V_0} + \left(\frac{U_1}{V_1} - \frac{U_0}{V_0}\right) + \left(\frac{U_2}{V_2} - \frac{U_1}{V_1}\right) + \cdots,$$

qui converge et diverge en même temps que la suite des réduites.

Si le rapport

$$R_n = \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right) : \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{U_{n+1}V_n - U_n V_{n+1}}{U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n} \times \frac{V_n V_{n-1}}{V_{n+1} V_n} = \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} \frac{V_n V_{n-1}}{V_{n+1} V_n},$$

où les fonctions V_{n+1}, V_n, V_{n-1} sont liées par la relation

$$V_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) V_n + \frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} V_{n-1} = 0$$

ou

$$\frac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} \times \frac{V_n}{V_{n+1}} \times \frac{V_{n-1}}{V_n} - \left(t + \frac{1}{2}\right) \frac{V_n}{V_{n+1}} + 1 = 0,$$

tend vers une limite moindre que *un,* il y a convergence.

Or, si les modules des racines de l'équation

$$(2) \qquad \tfrac{1}{16}\alpha^2 - \left(t + \tfrac{1}{2}\right)\alpha + 1 = 0$$

obtenue en faisant n *infini* et $\dfrac{V_n}{V_{n+1}} = \dfrac{V_{n-1}}{V_n} = \alpha$ dans l'équation précédente *sont inégaux,* la limite est moindre que *un,* il y a convergence. Si ces *modules sont égaux,* ce qui nécessite que l'équation étant écrite

$$\alpha^2 - 2(p + qi)\alpha + 1 = 0$$

on ait

$$q = 0, \qquad p^2 < 1,$$

et seulement dans ce cas, il y a doute sur la convergence.

Dans le cas présent, l'équation en α peut s'écrire

$$\left(\tfrac{1}{4}\alpha\right)^2 - 2(2t + 1) \times \left(\tfrac{1}{4}\alpha\right) + 1 = 0$$

et les modules des racines de cette équation sont égaux en même temps que les modules des racines de l'équation (1). Il y a donc doute sur la convergence quand

$$2t + 1 = \frac{2(x - iy)}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1 - \frac{2iy}{x^2 + y^2};$$

ce qui donne lieu aux relations

$$y = 0, \qquad -1 < \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1 < 1$$

et cela a lieu si la variable z a une *valeur réelle négative moindre que un*:

Le point $z = -1$ étant point singulier pour la fonction

$$\log(1+z)$$

la coupure est lieu de divergence certaine et *la fraction continue* (1) *représente la fonction dans tout le plan de la variable* z, *sauf sur la coupure allant sur* Ox *du point* -1 *à* $-\infty$.

56. Gauss a donné aussi le développement

$$\log\frac{1+z}{1-z} = \cfrac{2z}{1 - \cfrac{\frac{1.1}{1.3}z^2}{1 - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}z^2}{1 - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}z^2}{1 - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}z^2}{1 - \cdots}}}}} \tag{3}$$

Ici,

$$a_n = -\frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)},$$
$$b_n = 1,$$

et nous avons à étudier l'équation

$$1 - \alpha + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}z^2\alpha^2 = 0,$$

que nous écrirons

$$\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{z\alpha}{2}\right)^2 - \frac{2}{z}\left(\frac{z\alpha}{2}\right) + 1 = 0,$$

et qui devient à la limite

$$\left(\frac{z\alpha}{2}\right)^2 - 2\frac{x-iy}{x^2+y^2}\left(\frac{z\alpha}{2}\right) + 1 = 0.$$

La région de convergence douteuse est définie par les relations

$$y = 0, \qquad -1 < \frac{x}{x^2+y^2} < 1,$$

où

$$y=0, \quad -x^2 < x < x^2 c.a.d. x(x-1) > 0 \quad \text{avec} \quad x(x+1) > 0$$

et comprend la partie de l'axe des x extérieure au segment $-1, +1$.

Les points -1, $+1$ étant points singuliers logarithmiques de la fonction, la région de convergence douteuse est région de divergence certaine et

La fraction continue (3) *représente la fonction* $\log\frac{1+z}{1-z}$ *dans tout le plan de la variable* z, *sauf sur les coupures allant sur* Ox *du point* $+1$ *au point* $+\infty$ *et du point* -1 *au point* $-\infty$.

57. Ces fractions continues dérivent d'une fraction continue beaucoup plus générale donnée par GAUSS et que je vais maintenant étudier.

Si

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \cdots$$

représente la série *hypergéométrique*, GAUSS a montré que la fonction

$$G = \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, z)}{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}$$

admet le développement en fraction continue

$$G = \cfrac{1}{1+\cfrac{a_0 z}{1+\cfrac{a_1 z}{1+\cfrac{a_2 z}{1+\cfrac{a_3 z}{1+\cdots}}}}}, \tag{4}$$

où

$$-a_0 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad -a_1 = \frac{(\beta+1)(\gamma+\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$-a_2 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \qquad -a_3 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

$$-a_4 = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+\rho)}, \qquad -a_5 = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}, \quad \cdots$$

et, en général,

$$-a_n = \frac{\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\right)\left(\gamma-\beta+\frac{n-1}{2}\right)\cos\frac{2n\pi}{2}}{(\gamma+n-1)(\gamma+n)} + \frac{\left(\beta+\frac{n}{2}\right)\left(\gamma-\alpha+\frac{n}{2}\right)\sin\frac{2n\pi}{2}}{(\gamma+n-1)(\gamma+n)}.$$

La forme transcendante de cette expression ne nous permet pas d'employer la méthode indiquée et, pour ce motif, nous allons transformer la fraction continue.

On peut écrire, en posant $t = \frac{1}{z}$,

$$G = \cfrac{t}{1 + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{t + \ddots}}}}}$$

et, vu

$$t + \frac{a_0}{1 + \frac{a_1}{\lambda}} = t + a_0 - \frac{a_0 a_1}{a_1 + \lambda},$$

$$G = \cfrac{t}{t + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{t + a_1 + a_2 - \cfrac{a_2 a_3}{t + a_3 + a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{\ddots}}}}$$

d'où

$$A_n = -\frac{(\alpha + n - 2)(\gamma - \beta + n - 2)(\beta + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)}{(\gamma + 2n - 4)(\gamma + 2n - 3)^2(\gamma + 2n - 2)}$$

$$B_n = t - \frac{(\beta + n - 1)(\gamma - \alpha + n - 1)}{(\gamma + 2n - 3)(\gamma + 2n - 2)} - \frac{(\alpha + n - 1)(\gamma - \beta + n - 1)}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n - 1)}$$

avec

$$V_{n+1} - B_n V_n - A_n V_{n-1} = 0$$

ou

$$-A_n \alpha^2 - B_n \alpha + 1 = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$-16 A_n \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 4 B_n \left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1 = 0.$$

Passant à la limite,

$$\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 4\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - 2\left[2\frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 1\right]\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 1 = 0.$$

Les conditions d'égalité des modules sont

$$Y = 0, \quad -1 < \frac{2x}{x^2 + y^2} - 1 < 1:$$

le point z doit se trouver sur la partie de l'axe des x située *à droite du point un*. Le point $z = 1$ étant le seul point singulier de la fonction, *la fraction continue transformée représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la coupure allant du point $x = 1$ au point $x = \infty$.*

58. Si dans la formule (4) on fait $\beta = 0$ et qu'on change γ en $\gamma - 1$, l'identité

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = 1$$

montre que le développement donné devient celui de la fonction

$$F(\alpha, 1, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma \cdot (\gamma+1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 + \cdots$$

Ce développement est donc valable dans tout le plan, sauf sur la coupure $+1$, $+\infty$.

Cas particuliers:

1° $$(t + u)^\omega = t^\omega F\left(-\omega, \beta, \beta, -\frac{u}{t}\right);$$

donc

$$(1 - z)^\omega = F(-\omega, 1, 1, z)$$

et le développement correspondant sera valable dans tout le plan, exceptée la coupure indiquée.

2° Il en est de même des fractions continues

$$\frac{\frac{2}{3\rho} z^2}{\frac{2}{3\rho} z + F\left(3, 1, \frac{\rho}{2}, z\right)}, \qquad \frac{1}{G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, z\right)},$$

rencontrées par Gauss dans sa « *Theoria motus corporum cœlestium, etc.* ».

3° La fraction continue

$$\frac{F(s, i+s, i+1, z^2)}{F(s, i+s-1, i, z^2)}$$

étudiée par Tisserand *) *converge dans tout le plan de la variable z sauf sur les segments $+1$ à $+\infty$, -1 à $-\infty$ de l'axe des x.*

---

*) Tisserand, *Mécanique céleste*, tome I, p. 283.

II. — Les fractions continues de Lagrange.

59. Lagrange a donné le développement de la fonction

$$Z(z) = \int \frac{dz}{1 + z^{\omega}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{\xi_1 z^{\omega}}{1 + \cfrac{\xi_2 z^{\omega}}{1 + \cfrac{\xi_3 z^{\omega}}{1 + \ddots}}}},$$

où

$$\xi_1 = \frac{z^{\omega}}{\omega + 1},$$

$$\xi_2 = \frac{\omega^2}{(\omega + 1)(2\omega + 1)} z^{\omega}, \qquad \xi_3 = \frac{(\omega + 1)^2}{(2\omega + 1)(3\omega + 1)} z^{\omega},$$

$$\xi_4 = \frac{(2\omega)^2}{(3\omega + 1)(4\omega + 1)} z^{\omega}, \qquad \xi_5 = \frac{(2\omega + 1)^2}{(4\omega + 1)(5\omega + 1)} z^{\omega},$$

$$\xi_6 = \frac{(3\omega)^2}{(5\omega + 1)(6\omega + 1)} z^{\omega}, \qquad \xi_7 = \frac{(3\omega + 1)^2}{(6\omega + 1)(7\omega + 1)} z^{\omega},$$

. . . .

$$\xi_{2n} = \frac{(n\omega)^2}{[(2n-1)\omega+1](2n\omega+1)} z^{\omega}, \quad \xi_{2n+1} = \frac{(n\omega+1)^2}{(2n\omega+1)[(2n+1)\omega+1]} z^{\omega}, \ \ldots;$$

usant d'une transformation déjà indiquée, nous écrirons cette fraction continue

$$z - \cfrac{\xi_1 z^{\omega+1}}{1 + (\xi_1 + \xi_2) z^{\omega} - \cfrac{\xi_2 \xi_3 z^{2\omega}}{1 + (\xi_3 + \xi_4) z^{\omega} - \cfrac{\xi_4 \xi_5 z^{2\omega}}{\ddots}}}$$

$$= z + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}}$$

et nous aurons ici

$$(5)\begin{cases} U_{n+1}-b_{n+1}U_n-a_{n+1}U_{n-1}=0, \\ V_{n+1}-b_{n+1}V_n-a_{n+1}V_{n-1}=0, \\ a_{n+1}=-\dfrac{[(n-1)\omega+1]^2 n^2\omega^2 z^{2\omega}}{[2(n-1)\omega+1][(2n-1)\omega+1]^2(2n\omega+1)} \\ b_{n+1}=\left\{\dfrac{1}{z^\omega}+\dfrac{n^2\omega^2}{[(2n-1)\omega+1][(2n\omega+1)]}+\dfrac{(n\omega+1)^2}{(2n\omega+1)[(2n+1)\omega+1]}\right\}z^\omega \\ 1-\left[\dfrac{1}{z\omega}+\dfrac{1}{2}\right]z^\omega\alpha+\dfrac{1}{16}z^{2\omega}\alpha^2=0; \end{cases}$$

écrivant cette dernière équation

$$\left(\frac{z^\omega}{4}\alpha\right)^2-2\left[\frac{2}{z\omega}+1\right]\left(\frac{z^\omega}{4}\alpha\right)+1=0,$$

si

$$\frac{2}{z\omega}+1=p+qi,$$

les conditions de convergence douteuse seront, comme à l'ordinaire,

$$q=0,\qquad p^2<1.$$

Nous allons examiner quelques cas particuliers.

60. 1° $\omega=1$

$$Z(z)=\log(1+z),$$

$$p=\frac{2x}{x^2}+1,\qquad q=-\frac{2iy}{x^2+y^2};$$

convergence douteuse sur la coupure allant du point -1 à $-\infty$: la *fraction continue* (5) *représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la coupure allant du point* -1 *à* $-\infty$.

61. 2° $\omega=2$

$$Z(z)=\operatorname{arc\,tang} z,$$

$$p=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\qquad q=\frac{-2xy}{(x^2+z^2)^2}.$$

Si $y=0$, p^2 ne peut être moindre que *un*.

Si $x=0$, la condition $p^2<1$ s'écrit $(y-1)(y+1)>0$: *la fraction continue représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la partie de l'axe des y extérieure au segment* $\pm i$.

62. 3° $\omega = 3$

$$p+qi=\frac{2}{z^3}+1=\frac{2(x-iy)^3}{(x^2+y^2)^3}+1=\frac{2(x^3-3xy^2)}{(x^2+y^2)^3}+1+i\frac{y^3-3x^2y}{(x^2+y^2)^3};$$

la condition $q=0$ suppose

$$y=0 \quad \text{ou} \quad y^2-3x^2=0.$$

Si $y=0$, la condition $p^2<1$ donne

$$-1<\frac{2x}{x^3}+1<1$$

ou

$$x<-1.$$

Si $y^2=3x^2$, la condition $p^2<1$ s'écrit

$$x>0 \quad \text{avec} \quad x(8x^3-1)>0.$$

Les coupures suivent les droites $y=\pm x\sqrt{3}$; *elles vont des points singuliers* $z=\sqrt[3]{-1}$ *à l'infini.*

Le développement représente donc la fonction dans tout le plan, sauf sur les trois coupures définies.

63. On peut traiter *directement* le cas de $n=2$:

$$y=\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arc\,tang} z=\cfrac{z}{1+\cfrac{\frac{z^2}{1.3}}{1+\cfrac{\frac{4z^2}{3.5}}{1+\cfrac{\frac{9z^2}{5.7}}{1+\cfrac{\frac{16z^2}{7.9}}{1+\cdots}}}}}$$

Ici

$$b_n=1,$$
$$a_n=\frac{(n-1)^2z^2}{(2n-3)(2n-1)},$$

et il est inutile de transformer la fraction continue.

L'équation en α est

$$1-\alpha-\frac{z^2}{4}\alpha^2=0.$$

Nous l'écrirons

$$\left(\frac{z}{2}i\alpha\right)^2 - 2\frac{1}{zi}\left(\frac{z}{2}i\alpha\right) + 1 = 0$$

et sous cette forme on retrouve les coupures allant des points $\pm i$ à l'infini, suivant l'axe Oy.

La fraction continue représente la fonction dans tout le plan, sauf sur les coupures joignant d'une part le point $+i$ au point $+\infty$ de l'axe des y et d'autre part le point $-i$ au point $-\infty$ du même axe.

64. On peut étudier *directement encore* le développement

$$(1+z)^\omega = 1 + \cfrac{\omega z}{1+(1-\omega)\frac{z}{2} + \cfrac{\frac{\omega^2-1}{1\cdot 3}\cdot\frac{z^2}{4}}{1+\frac{z}{2}+\cfrac{\frac{\omega^2-4}{3\cdot 5}\cdot\frac{z^2}{4}}{1+\frac{z}{2}+\cfrac{\frac{\omega^2-9}{5\cdot 7}\cdot\frac{z^2}{4}}{\ddots}}}}$$

Ici,

$$b_n = 1 + \frac{z}{2}$$

$$a_n = \frac{\omega^2 - n^2}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{z^2}{4}$$

et l'équation en α s'écrit

$$1 - \left(1 + \frac{z}{2}\right)\alpha + \frac{1}{16}z^2\alpha^2 = 0$$

ou

$$\left(\frac{z\alpha}{4}\right)^2 - \left(1 + \frac{z}{2}\right)\frac{4}{z}\left(\frac{z\alpha}{4}\right) + 1 = 0,$$

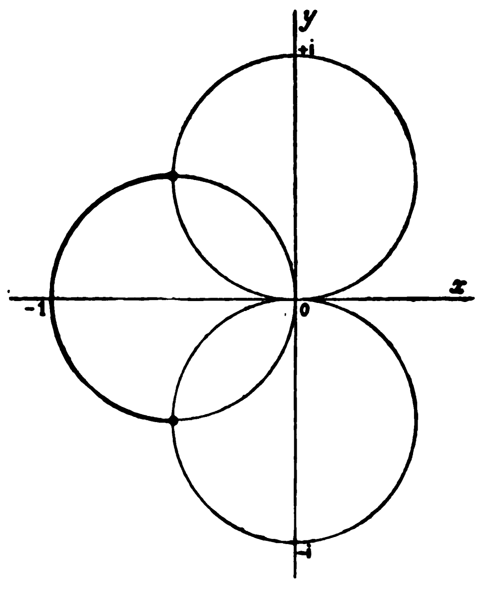
$$\left(\frac{z\alpha}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{z} + 1\right)\left(\frac{z\alpha}{4}\right) + 1 = 0:$$

Le développement représente la fonction dans tout le plan, sauf sur la coupure suivant l'axe des x allant du point -1 au point $-\infty$.

65. Étudions enfin le développement de la fonction $Z(z)$ vérifiant l'équation différentielle

$$1 + 2\omega z . Z(z) - Z^2(z) + \Pi z^2\frac{d.Z(z)}{dz} = 0:$$

$$Z(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\omega z}{1 + \cfrac{\frac{\omega - \Pi}{2} z}{1 - \cfrac{\frac{\omega + \Pi}{2} z}{1 + \cfrac{\frac{\omega - 2\Pi}{2} z}{1 - \cfrac{\frac{\omega + 2\Pi}{2} z}{1 + \cfrac{\frac{\omega - 3\Pi}{2} z}{\ddots}}}}}}}$$



(Fig. 2).

La transformation que nous avons déjà employée donnera lieu à l'équation

$$\alpha^2 + 2\left(\frac{1}{z} + 1\right)\alpha - 1 = 0,$$

qu'on écrira

$$(\alpha i)^2 - 2\left(\frac{1}{z} + 1\right)\frac{1}{i}(\alpha i) + 1 = 0$$

et nous avons à étudier l'expression

$$\frac{ix+y}{x^2+y^2}i;$$

il faut donc, pour la convergence, que

$$x^2+y^2+n=0$$

avec

$$-1<\frac{y}{x^2+y^2}<1,$$

ce qui suppose la coupure circulaire figurée ci-joint:
Le développement converge dans tout le plan, sauf peut-être sur la coupure.

Lille, 26 novembre 1904.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

I SISTEMI CICLICI NELLO SPAZIO EUCLIDEO AD n DIMENSIONI.

Nota di **Umberto Sbrana**, in Pisa.

Adunanza del 25 dicembre 1904.

Un sistema ∞^{n-1} di cerchi in uno spazio euclideo ad n dimensioni dicesi ciclico, quando esistono ∞^1 ipersuperficie normali a tutti i cerchi che lo compongono. I sistemi ciclici così generalizzati sono stati già considerati dal DARBOUX *). In questo lavoro viene risoluto, con un metodo che è la diretta estensione di quello che serve per lo spazio ordinario, il problema della determinazione di tutti i sistemi ciclici normali ad una data ipersuperficie, e si ottengono altri risultati aventi relazione col problema stesso.

Sistema di equazioni a derivate parziali da cui dipende la determinazione di tutti i sistemi ciclici normali ad una data ipersuperficie.

1. Un sistema ∞^{n-1} di cerchi sarà analiticamente individuato quando sieno dati in funzione di $n-1$ variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$: le coordinate $y_1, y_2, \ldots y_n$ del centro del cerchio generico, i coseni di direzione $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ di due orientazioni ortogonali giacenti nel suo piano, e il suo raggio R.

Se indichiamo con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, le coordinate del punto, intersezione del cerchio con la semiretta, passante pel centro, e che forma con la orientazione $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ un angolo t, avremo:

$$\xi_i = y_i + R(\alpha_i \cos t + \beta_i \operatorname{sen} t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

---

*) DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Tome I^er, pag. 181.

Pensiamo t funzione di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$; allora le (1) rappresentano una ipersuperficie del nostro spazio S_n. Affinchè tale ipersuperficie sia normale agli ∞^{n-1} cerchi, sarà necessario e sufficiente che la funzione t soddisfi alla relazione:

$$\mathop{\mathrm{S}}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t} d\xi_i = 0 \text{ *)}.$$

Avendosi:

$$d\xi_i = \sum_k \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} du_k + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} dt,$$

la precedente si trasforma nell'altra:

$$\mathop{\mathrm{S}}_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right)^2 \cdot dt + \mathop{\mathrm{S}}_i \sum_k \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} du_k = 0.$$

Sostituendo in quest'ultima le espressioni delle sommatorie:

$$\mathop{\mathrm{S}}_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right)^2, \qquad \mathop{\mathrm{S}}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k},$$

ottenuti dalle (1) con semplice calcolo, troviamo per l'incognita t l'equazione ai differenziali totali:

$$(2) \quad R dt + \sum_k \left(\cos t \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial y_i}{\partial u_k} - \operatorname{sen} t \mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_k} + R \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_k}\right) du_k = 0.$$

Le condizioni di illimitata integrabilità per questa equazione sono soddisfatte identicamente in $t, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, allora e allora soltanto che lo sieno le seguenti $\frac{3(n-1)(n-2)}{2}$:

$$R^2 \left[\frac{\partial}{\partial u_m}\left(\mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_l}\right) - \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_m}\right)\right]$$
$$\mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_m} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial y_i}{\partial u_l} + \mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_l} \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial y_i}{\partial u_m} = 0;$$

$$R \left[\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_m}\right) - \frac{\partial}{\partial u_m}\left(\mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_l}\right)\right.$$
$$\left. + \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial y_i}{\partial u_l} \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_m} - \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial y_i}{\partial u_m} \mathop{\mathrm{S}}_i \beta_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_l}\right]$$
$$+ \frac{\partial R}{\partial u_m} \mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_l} - \frac{\partial R}{\partial u_l} \mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i \frac{\partial y_i}{\partial u_m} = 0;$$

*) Col simbolo S indicheremo una sommatoria da 1 ad n, col simbolo $\sum$ una sommatoria da 1 ad $n-1$.

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&R\Big[\frac{\partial}{\partial u_m}\Big(\mathop{S}_i\beta_i\frac{\partial y_i}{\partial u_l}\Big)-\frac{\partial}{\partial u_l}\Big(\mathop{S}_i\beta_i\frac{\partial y_i}{\partial u_m}\Big)\\
&\qquad+\mathop{S}_i\alpha_i\frac{\partial y_i}{\partial u_l}\mathop{S}_i\beta_i\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_m}-\mathop{S}_i\alpha_i\frac{\partial y_i}{\partial u_m}\mathop{S}_i\beta_i\frac{\partial \alpha_i}{\partial u_l}\Big]\\
&\qquad+\frac{\partial R}{\partial u_l}\mathop{S}_i\beta_i\frac{\partial y_i}{\partial u_m}-\frac{\partial R}{\partial u_m}\mathop{S}_i\beta_i\frac{\partial y_i}{\partial u_l}=0;
\end{aligned}\right.
$$

essendo (lm) una combinazione qualsiasi degli $n-1$ indici $1, 2, \dots n-1$. Infatti si vede facilmente che tali condizioni sono:

$$(4)\qquad A_{lm}+B_{lm}\operatorname{sen} t+C_{lm}\cos t=0,$$

essendo A_{lm}, B_{lm}, C_{lm} rispettivamente i primi membri delle (3); ora affinchè queste sieno soddisfatte identicamente rispetto alle variabili $t, u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, è, manifestamente, necessario e sufficiente che siano soddisfatte le (3). Se poi le (3) non sono soddisfatte, potrà darsi che vi sieno, al più, due forme distinte della funzione t soddisfacenti alle (4) e alla (2), quindi due ipersuperficie, al più, normali al sistema di cerchi.

Se di tali ipersuperficie normali ve ne sono tre, le (4) sono identicamente soddisfatte, e la (2) è illimitatamente integrabile. Possiamo dunque concludere che:

Se esistono tre ipersuperficie che tagliano ortogonalmente un sistema di ∞^{n-1} cerchi, ne esistono necessariamente ∞^1, e il sistema è quindi ciclico.

Se nella (2) prendiamo per funzione incognita anzichè t, $\Lambda=\operatorname{tang}\frac{t}{2}$, l'equazione assume la forma di RICCATI:

$$d\Lambda=\sum_i(a_i\Lambda^2+b_i\Lambda+c_i)\,du_i;$$

percui, ricordando come quattro soluzioni particolari di quest'ultima, abbiano rapporto anarmonico costante, e tenendo conto del significato geometrico di Λ, potremo enunciare il seguente teorema:

Ogni cerchio di un sistema ciclico è segato da quattro determinate delle ∞^1 ipersuperficie normali in quattro punti, di rapporto anarmonico indipendente dal cerchio considerato.

2. Abbiasi un sistema ciclico e si consideri un'ipersuperficie S normale, la quale supporremo che sia a linee di curvatura coordinate; che sia cioè possibile riferire i suoi punti ai sistemi di valori di $n-1$ parametri $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, in modo che lungo una linea di curvatura uno solo di questi vari, e gli altri si mantengano costanti. Sieno

$$\sum_{rs} b_{rs}\,du_r\,du_s,\qquad \sum_{r,s}\Omega_{rs}\,du_r\,du_s$$

le due forme differenziali fondamentali di S, essendone la prima l'elemento lineare. Se $R_1, R_2, \dots R_{n-1}$ indicano gli $n-1$ raggi principali di curvatura di S, le sue linee di curvatura sono costituite da $n-1$ schiere, di cui la iesima soddisfa al sistema seguente di equazioni differenziali:

$$(5) \qquad \sum_s (b_{rs} - R_i \Omega_{rs}) du_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots n-1).$$

Quando si prendano per parametri $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ quelli indicati al principio del presente paragrafo, il che equivale ad assumere per linee coordinate le linee di curvatura, risulta: $b_{rs} = 0$ per $r \neq s$; è noto infatti come due linee di curvatura di schiere diverse, e partenti da uno stesso punto, sieno fra loro normali nel punto stesso. Ciò posto, dalle (5) risulta poi che è: $\Omega_{rs} = 0$ per $r \neq s$ e: $\Omega_{ii} = \frac{b_{ii}}{R_i}$. Indichino $X_1, X_2, \dots X_n$ i coseni di direzione della normale ad S, nel suo punto: $x_1, x_2, \dots x_n$.

Riferendoci a parametri qualsiansi, sussistono le note *) equazioni:

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_l \begin{Bmatrix} r s \\ l \end{Bmatrix}_b \dfrac{\partial x}{\partial u_l} + \Omega_{rs} X \\ \dfrac{\partial X}{\partial u_s} = - \sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda\mu} \Omega_{\mu s} \dfrac{\partial x}{\partial u_\lambda} \end{cases} \qquad (r, s = 1, 2, \dots n-1),$$

alle quali soddisfano le n coppie di funzioni: (x_i, X_i) per $i = 1, 2, \dots n$. In queste equazioni i simboli $\begin{Bmatrix} r s \\ l \end{Bmatrix}$ sono quelli noti di CHRISTOFFEL; e la $B_{\lambda\mu}$ indica il complemento algebrico di $b_{\lambda\mu}$ nel determinante delle b, diviso per questo determinante.

Se assumiamo per parametri u quelli particolari già scelti, le prime delle (6) dànno luogo ai seguenti due gruppi:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r^2} = -\sum_l{}' \dfrac{1}{2 b_{ll}} \dfrac{\partial b_{rr}}{\partial u_l} \dfrac{\partial x}{\partial u_l} + \dfrac{1}{2 b_{rr}} \dfrac{\partial b_{rr}}{\partial u_r} \dfrac{\partial x}{\partial u_r} + \dfrac{b_{rr}}{R_r} X \quad (r, s = 1, 2 \dots n-1) \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} = \dfrac{1}{2 b_{rr}} \dfrac{\partial b_{rr}}{\partial u_s} \dfrac{\partial x}{\partial u_r} + \dfrac{1}{2 b_{ss}} \dfrac{\partial b_{ss}}{\partial u_r} \dfrac{\partial x}{\partial u_s} \qquad (r \neq s), \end{cases}$$

il simbolo $\sum'$ volendo significare che ad l si devono fare percorrere tutti i valori da 1 ad $n-1$, escluso r.

Dalle seconde delle (6) si deducono poi le altre:

$$(8) \qquad \frac{\partial X}{\partial u_s} = - \frac{1}{R_s} \frac{\partial x}{\partial u_s} \qquad (s = 1, 2, \dots n-1).$$

*) LUIGI BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. I, pag. 462; form. (A), (B).

Indichino $X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots X_n^{(k)}$ i coseni direttori della tangente alla linea u_k di $\mathfrak{S}$ nel punto $(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$, avremo:

$$X_1^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \frac{\partial x_1}{\partial u_k}, \quad X_2^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \frac{\partial x_2}{\partial u_k} \ldots X_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \frac{\partial x_n}{\partial u_k}.$$

Le n coppie di funzioni: $(x_i, X_i^{(k)})$ per $i = 1, 2, \ldots n$, soddisfano evidentemente alle relazioni seguenti:

$$\frac{\partial X^{(k)}}{\partial u_k} = -\frac{1}{b_{kk}} \frac{\partial \sqrt{b_{kk}}}{\partial u_k} \frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k^2} \quad (k, s = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\frac{\partial X^{(k)}}{\partial u_s} = -\frac{1}{b_{kk}} \frac{\partial \sqrt{b_{kk}}}{\partial u_s} \frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k d u_s} \quad (k \neq s),$$

le quali, quando si tenga conto delle (7), si trasformano nelle altre:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X^{(k)}}{\partial u_k} = -\sum_l{}' \dfrac{1}{\sqrt{b_{ll}}} \dfrac{\partial \sqrt{b_{kk}}}{\partial u_l} X^{(l)} + \dfrac{\sqrt{b_{kk}}}{R_k} X & (k, s = 1, 2, \ldots n-1) \\ \dfrac{\partial X^{(k)}}{\partial u_s} = \dfrac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \dfrac{\partial \sqrt{b_{ss}}}{\partial u_k} X^{(s)}. & (k \neq s). \end{cases}$$

3. Consideriamo il cerchio del sistema passante per il punto $P \equiv (u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ di $\mathfrak{S}$. Il suo piano segherà l'iperpiano tangente ad $\mathfrak{S}$ in P secondo una retta, sulla quale, ad una distanza eguale ad R da P, si troverà il suo centro O. Sieno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ gli angoli formati dall'orientazione che va da P ad O, rispettivamente con le linee coordinate: $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ uscenti da P; i suoi coseni direttori: $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n$, saranno espressi come segue:

$$\mathfrak{M}_i = \cos\alpha_1 X_i^{(1)} + \cos\alpha_2 X_i^{(2)} + \cdots + \cos\alpha_{n-1} X_i^{(n-1)}. \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Le coordinate $y_1, y_2, \ldots y_n$ di O saranno dunque date dalle formole:

$$(10) \quad y_i = x_i + R(\cos\alpha_1 X_i^{(1)} + \cos\alpha_2 X_i^{(2)} + \cdots + \cos\alpha_{n-1} X_i^{(n-1)}) \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Nelle (1) le due orientazioni, aventi rispettivamente per coseni direttori α_i, β_i per $i = 1, 2, \ldots n$, sono ortogonali e giacciono nel piano del cerchio, ma non debbono soddisfare ad altre condizioni; ci sarà quindi lecito il prendere $\alpha_i = \mathfrak{M}_i$, $\beta_i = X_i$.

Tenendo conto delle (10), (9) e delle altre:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_i X_i X_i^{(k)} = 0, \qquad \mathop{\mathfrak{S}}_i (X_i^{(k)})^2 = 1, \qquad \mathop{\mathfrak{S}}_i X_i^2 = 1,$$

con semplice calcolo si trovano le seguenti:

$$\mathop{\mathrm{S}}_i X_i \frac{\partial y_i}{\partial u_k} = R\frac{\sqrt{b_k}}{R_k}\cos\alpha_k$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_i \mathfrak{M}_i \frac{\partial y_i}{\partial u_k} = \sqrt{b_k}\cos\alpha_k + \frac{\partial R}{\partial u_k}$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_i X_i \frac{\partial \mathfrak{M}_i}{\partial u_k} = \frac{\sqrt{b_k}}{R_k}\cdot\cos\alpha_k\,,$$

avendo posto $b_k = b_{kk}$. Sostituendo nella (2) i valori così trovati delle sommatorie che vi compariscono, essa diviene la seguente:

$$(11)\quad dt = \sum_k\left[\left(\frac{\sqrt{b_k}}{R}\cos\alpha_k + \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u_k}\right)\mathrm{sen}\,t - \frac{\sqrt{b_k}}{R_k}\cos\alpha_k(1+\cos t)\right]du_k\,.$$

Facendo la stessa sostituzione nelle (3), esse si riducono alle seguenti $2\frac{(n-1)(n-2)}{2}$:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_l}\left(\dfrac{\sqrt{b_m}\cos\alpha_m}{R}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u_m}\left(\dfrac{\sqrt{b_l}\cos\alpha_l}{R}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_m}\left(\dfrac{\sqrt{b_l}\cos\alpha_l}{R}\cdot\dfrac{1}{R_l}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u_l}\left(\dfrac{\sqrt{b_m}\cos\alpha_m}{R}\cdot\dfrac{1}{R_m}\right) \\ \quad + \dfrac{\sqrt{b_l}\sqrt{b_m}}{R^2}\cos\alpha_m\cos\alpha_l\left(\dfrac{1}{R_m} - \dfrac{1}{R_l}\right) = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix}(l, m = 1, 2, \ldots n-1)\\(l \neq m)\end{matrix}$$

Le prime delle (12) ci dicono che l'espressione:

$$\sum\frac{\sqrt{b_k}\cos\alpha_k}{R}du_k$$

è un differenziale esatto, dimodochè potremo porre:

$$(13)\qquad \frac{\sqrt{b_k}\cos\alpha_k}{R} = -\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u_k}\,,$$

essendo ψ un'opportuna funzione di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.

Fra i coefficienti delle due forme fondamentali

$$\sum_{r,s} b_{rs}\,du_r\,du_s\,,\qquad \sum\Omega_{rs}\,du_r\,du_s$$

di un'ipersuperficie, sussistono le equazioni di Codazzi *), che sono le seguenti:

$$\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial\Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\t\end{Bmatrix}_b\Omega_{\gamma t} - \sum_t\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\t\end{Bmatrix}_b\Omega_{\beta t} = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots n-1).$$

*) Luigi Bianchi, l. c., vol. I, pag. 462; form. (II).

Avendo scelto per la S i parametri u nel modo particolare detto, quelle di queste equazioni, che corrispondono ad $\alpha = \beta \neq \gamma$, dànno luogo alle altre:

$$\frac{\partial\left(\frac{b_\alpha}{R_\alpha}\right)}{\partial u_\gamma} - \frac{1}{2R_\gamma}\frac{\partial b_\alpha}{\partial u_\gamma} - \frac{1}{2R_\alpha}\frac{\partial b_\alpha}{\partial u_\gamma} = 0,$$

le quali si vede facilmente essere equivalenti a queste:

$$(14) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{b_\alpha}}{R_\alpha}\right)}{\partial u_\gamma} = \frac{1}{R_\gamma}\frac{\partial\sqrt{b_\alpha}}{\partial u_\gamma} \qquad \begin{matrix}(\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots n-1)\\ (\alpha \neq \gamma).\end{matrix}$$

4. Se per una certa coppia (l, m) di indici si avesse: $R_l = R_m = \text{cost.}$, allora la seconda delle (12) corrispondente sarebbe identica con l'analoga fra le prime. Siccome noi supponiamo che S sia un'ipersuperficie generica, così questa particolarità non si verificherà. Introducendo allora nelle seconde (12) la funzione ψ, per mezzo delle (13), si ottengono dapprima le seguenti:

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial u_l \partial u_m}\left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_l}\right) - \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u_l}\frac{\partial\left(\frac{1}{R_l}\right)}{\partial u_m} + \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u_m}\frac{\partial\left(\frac{1}{R_m}\right)}{\partial u_l} = 0 \quad (l \neq m).$$

Dalle (14), essendo $l \neq m$, seguono le altre:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R_l}\right)}{\partial u_m} = \left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_l}\right)\frac{\partial \log\sqrt{b_l}}{\partial u_m},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R_m}\right)}{\partial u_l} = -\left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_l}\right)\frac{\partial \log\sqrt{b_m}}{\partial u_l}.$$

Tenendo conto di queste ultime, e, supposto, ciò che è lecito essendo S generica, che per nessuna coppia di indici (l, m) si abbia identicamente $R_l = R_m$, le precedenti assumono la forma che segue:

$$(15) \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial u_l d u_m} = \frac{\partial \log\sqrt{b_l}}{\partial u_m}\frac{\partial\psi}{\partial u_l} + \frac{\partial \log\sqrt{b_m}}{\partial u_l}\frac{\partial\psi}{\partial u_m} \quad \begin{matrix}(l, m = 1, 2, \ldots n-1)\\ (l \neq m)\end{matrix}.$$

La funzione ψ è dunque un integrale del sistema di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ equazioni a derivate parziali del secondo ordine, lineari, (15). Inversamente, assegnata l'ipersuperficie iniziale S, la determinazione di tutti i

sistemi ciclici ad essa normali dipende dall'integrazione del sistema (15), poichè ogni integrale di questo individua perfettamente un corrispondente sistema ciclico.

Per verificare ciò, basta osservare le (13); da esse deducesi che è:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{R^2} &= \sum_i \frac{1}{b_i}\left(\frac{\partial \log \psi}{\partial u_i}\right)^2 = \Delta_1 (\log \psi) \\ \cos \alpha_k &= -\frac{R}{\sqrt{b_k}}\frac{\partial \log \psi}{\partial u_k}\,; \end{aligned}\right. \qquad (k = 1, 2, \dots n-1)$$

ebbene il sistema ∞^{n-1} di cerchi normali ad S, corrispondente a questi valori degli α_k e di R, è un sistema ciclico poichè per esso le (12) risultano soddisfatte.

Le condizioni di compatibilità per il sistema (15) sono le seguenti:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{b_k}}{\partial u_i \partial u_l} = \frac{1}{\sqrt{b_i}}\frac{\partial \sqrt{b_i}}{\partial u_l}\frac{\partial \sqrt{b_k}}{\partial u_i} + \frac{1}{\sqrt{b_l}}\frac{\partial \sqrt{b_l}}{\partial u_i}\frac{\partial \sqrt{b_k}}{\partial u_l}$$

per $i, k, l = 1, 2, \dots n-1$, essendo: $i \neq k \neq l$; le quali, introducendo i simboli a quattro indici di seconda specie di Riemann, possono anche scriversi come segue:

$$(17)\qquad \{ik, kl\}_b = 0 \qquad (i \neq k \neq l).$$

Come è noto, in generale, sussistono fra i coefficienti delle due forme differenziali fondamentali di un'ipersuperficie le equazioni di Gauss *) generalizzate, che sono queste:

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\delta\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} = (\alpha\delta, \beta\gamma)_b,$$

essendo $(\alpha\delta, \beta\gamma)_b$ il simbolo a quattro indici di prima specie. Da queste equazioni, fatto $\alpha = i$, $\delta = k$, $\beta = k$, $\gamma = l$, coi parametri u già scelti, si traggono le seguenti:

$$(ik, kl) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

le quali, poichè si ha:

$$\{ik, kl\} = \frac{1}{b_k}(ik, kl)$$

si riducono alle (17), ossia alle condizioni di compatibilità del sistema (15), le quali sono dunque soddisfatte.

Segue da ciò, per un noto **) teorema sui sistemi della forma (15), che il sistema stesso ammette un integrale con $n-1$ funzioni arbitrarie

*) Luigi Bianchi, l. c., vol. I, pag. 462; form. (I).

**) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV^e Partie, pag. 270 e seg.

di una sola variabile, e cioè: una funzione della sola u_1, una della sola u_2 e così via. Ciò posto, dalle (16) risulta che tutti i sistemi ciclici, normali ad un'ipersuperficie assegnata, dipendono da $n-1$ funzioni arbitrarie.

L'equazione differenziale da cui dipende la determinazione delle ipersuperficie normali al sistema ciclico, corrispondente all'integrale ψ, si otterrà dalla (11) tenendo conto delle (13), ed è la seguente:

$$dt = \sum_k \left[\left(\frac{\partial \log R}{\partial u_k} - \frac{\partial \log \psi}{\partial u_k} \right) \operatorname{sen} t + \frac{\partial \log \psi}{\partial u_k} \frac{R}{R_k} (1 + \cos t) \right] d u_k .$$

Prendendo per nuova funzione incognita $\lambda = \operatorname{tang} \frac{t}{2}$, quest'ultima si trasforma nell'altra:

$$d\lambda = \sum_k \left[\lambda \frac{\partial \log \frac{R}{\psi}}{\partial u_k} + \frac{\partial \log \psi}{\partial u_k} \frac{R}{R_k} \right] d u_k ,$$

la quale è lineare in λ, e integrata ci dà:

$$(18) \qquad \lambda = \operatorname{tang} \frac{t}{2} = \frac{R}{\psi} \left(C + \int \sum_k \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} d u_k \right) ,$$

essendo C una costante arbitraria.

Sistema n^{plo} ortogonale relativo ad un sistema ciclico.

5. Poniamo:

$$W = \int \sum_k \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} d u_k ,$$

relazione equivalente alle $n-1$ seguenti:

$$(19) \qquad \frac{\partial W}{\partial u_k} = \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} \qquad (k = 1, 2, \dots n-1).$$

Le (1), con la scelta fatta nel § 3° delle due orientazioni α_i e β_i, tenuto conto inoltre delle (10), divengono:

$$(20) \qquad \xi_i = x_i + R\mathfrak{M}_i + R(\mathfrak{M}_i \cos t + X_i \operatorname{sen} t) \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Sia poi

$$d s'^2 = \mathop{S}_i d X_i^2 = \sum_{r,s} b'_{rs} d u_r d u_s$$

l'elemento lineare sferico relativo all'ipersuperficie S. Dalle (8) si deduce facilmente essere:

$$b'_{rs} = 0 \quad \text{per} \quad r \neq s; \qquad b'_{ss} = \frac{b_s}{R_s^2} ,$$

dimodochè posto $b'_{ss} = b'_s$ sarà:

$$ds'^2 = \sum_s b'_s du_s^2.$$

Le (8) possono manifestamente scriversi così:

$$X_i^{(s)} = -\frac{1}{\sqrt{b'_s}} \frac{\partial X_i}{\partial u_s};$$

poichè d'altra parte le (16) e le (19) ci dànno:

$$\cos\alpha_s = -\frac{R}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial u_s} \frac{1}{R_s \sqrt{b'_s}} = -\frac{R}{\psi} \frac{1}{\sqrt{b'_s}} \frac{\partial W}{\partial u_s},$$

così avremo:

$$\mathfrak{M}_i = \sum_s X_i^{(s)} \cos\alpha_s = \frac{R}{\psi} \sum_s \frac{1}{b'_s} \frac{\partial X_i}{\partial u_s} \frac{\partial W}{\partial u_s} = \frac{R}{\psi} \nabla'(X_i, W);$$

avendo posto nell'ultima espressione l'apice al simbolo di parametro differenziale misto, per indicare che è preso rispetto alla forma: $\sum_s b'_s du_s^2$. Le (20) assumeranno la forma seguente:

$$\xi_i = x_i + \frac{R^2}{\psi} \nabla'(X_i, W) + R\left[\frac{R}{\psi} \nabla'(X_i, W) \cos t + X_i \operatorname{sen} t\right].$$

Consideriamo la (18); essa, posto $C = u_n$ assume la forma seguente:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} t = \frac{R}{\psi}(u_n + W).$$

Esprimendo nelle precedenti $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ in funzione razionale di $\operatorname{tang}\frac{1}{2}t$, si trova:

$$\xi_i = x_i + \frac{R^2}{\psi} \nabla'(X_i, W) + \frac{R^2}{\psi} \frac{1 - \frac{R^2}{\psi^2}(u_n + W)^2}{1 + \frac{R^2}{\psi^2}(u_n + W)^2} \nabla'(X_i, W)$$
$$+ \frac{R^2}{\psi} \frac{2(u_n + W) X_i}{1 + \frac{R^2}{\psi^2}(u_n + W)^2};$$

le quali, posto:

$$\frac{2R^2}{\psi} \frac{1}{1 + \frac{R^2}{\psi^2}(u_n + W)^2} = \theta,$$

divengono le seguenti:

$$\xi_i = x_i + \theta(u_n + W) X_i + \theta \nabla'(X_i, W) \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{21}$$

La prima delle (16), tenendo conto delle (19), diviene:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\psi^2} \Delta'_1 W$$

ove l'apice al simbolo di parametro differenziale primo indica che questo deve essere preso rispetto alla forma: $\sum b'_i d u_i^2$.

Sostituendo il valore così trovato di R^2 nell'espressione della funzione θ ora introdotta, troviamo:

$$-\frac{2\psi}{\theta}+\Delta'_1 W+(u_n+W)^2=0. \tag{22}$$

6. Darboux ha dimostrato un teorema *) che, conservando ai simboli il significato fino a questo punto loro attribuito, può enunciarsi nel modo seguente:

« Integrato in modo generale il sistema di equazioni a derivate parziali (19) rispetto alle funzioni incognite ψ e W, se si risolvono rispetto ad $u_1, u_2, \ldots u_n$ le n equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{W+u_n}{2\psi}\mathop{S}_i(\xi_i-x_i)^2+\mathop{S}_i X_i(\xi_i-x_i)=0 \\ &-\frac{\dfrac{\partial W}{\partial u_k}}{2\psi}\mathop{S}_i(\xi_i-x_i)^2+\mathop{S}_i\frac{\partial X_i}{\partial u_k}(\xi_i-x_i)=0 \qquad (k=1,2,\ldots n-1)\end{aligned}\right. \tag{23}$$

ove ψ e W indicano una coppia di soluzioni del sistema (19), le espressioni così trovate di $u_1, u_2, \ldots u_n$, in funzione di $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, definiscono un sistema n^{uplo}, ortogonale dell'iperspazio generato da $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. L'elemento lineare di quest'ultimo assume, nei parametri $u_1, u_2, \ldots u_n$, la seguente forma:

$$ds^2=\mathop{S}_i d\xi_i^2=\theta^2 du_n^2+\sum_k\left(\frac{\psi\dfrac{\partial\theta}{\partial u_k}}{\theta\dfrac{\partial W}{\partial u_k}}\right)^2 b'_k du_k^2, \tag{24}$$

ove θ è la funzione definita dalla (22) ».

Le (23), posto $\mathop{S}_i(\xi_i-x_i)^2=2\psi\theta$, possono scriversi così:

$$\mathop{S}_i X_i(\xi_i-x_i)=(W+u_n)\theta$$

$$\mathop{S}_i\frac{\partial X_i}{\partial u_k}(\xi_i-x_i)=\frac{\partial W}{\partial u_k}\theta \qquad (k=1,2,\ldots n-1).$$

Queste risolte rispetto alle differenze: $\xi_1-x_1, \xi_2-x_2, \ldots \xi_n-x_n$,

---

*) Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, etc., Tome I^er, pag. 181.

ci dànno:

$$(21)^* \qquad \xi_i = x_i + \theta(u_n + W) X_i + \theta \nabla'(X_i, W).$$

Tenendo conto di queste ultime, si vede subito che la funzione θ ora introdotta soddisfa alla (22).

Nel sistema n^{uplo} ortogonale dato dal teorema di Darboux le ∞^{n-1} curve u_n sono cerchi, come risulta dalle (23). Questi cerchi, essendo tagliati ortogonalmente dalle ipersuperficie $u_n = \text{cost.}$, costituiscono un sistema ciclico.

Fra le ipersuperficie $u_n = \text{cost.}$ vi è la S, il cui punto generico ha le coordinate x_i; essa corrisponde al fare $u_n = \infty$.

Infatti dalla (22) risulta che: $\lim_{u_n = \infty} \theta(u_n + W) = 0$, quindi dalle (21)* segue, che per $u_n = \infty$ è: $\xi_i = x_i$.

Osservando ora come le (21)* coincidano con le (21), alle quali siamo giunti partendo da un qualsiasi sistema ciclico normale ad S, ne concludiamo che i sistemi ciclici dati dal teorema di Darboux sono tutti i possibili, soddisfacenti a quest'ultima condizione. Ad ogni sistema ciclico è adunque legato un sistema n^{uplo} ortogonale; una delle n famiglie di persuperficie di quest'ultimo è quella delle ∞^1 ipersuperficie normali al primo.

Sistemi ciclici e rappresentazione sferica.

7. Consideriamo le equazioni:

$$(19)^* \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u_k} = R_k \frac{\partial W}{\partial u_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1).$$

Eliminando tra queste la funzione W, si ottiene per ψ il seguente sistema:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{R_k}\frac{\partial \psi}{\partial u_k}\right) = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{R_i}\frac{\partial \psi}{\partial u_i}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n-1),$$

il quale, tenuto conto delle (14), facilmente si vede essere identico al sistema (15). Se invece dalle (19)* eliminiamo ψ, e teniamo conto delle (14), vediamo come W sia un integrale del sistema seguente:

$$(25) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log \sqrt{b'_i}}{\partial u_k}\frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{\partial \log \sqrt{b'_k}}{\partial u_i}\frac{\partial W}{\partial u_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-1),$$

Risulta di qui che l'integrazione del sistema (15) si riduce a quella

dell'analogo (25). Da quest'ultimo dipende la ricerca di tutte le ipersuperficie, che hanno per elemento lineare, sferico, rappresentativo il seguente: $ds'^2 = \sum_i b'_i du_i^2$ *).

Possiamo dunque dire che:

Il problema della determinazione dei sistemi ciclici normali ad un'ipersuperficie S è equivalente a quello della ricerca di tutte le ipersuperficie, che hanno lo stesso elemento lineare, sferico, rappresentativo di S.

Per studiare più da vicino la relazione esistente fra questi due problemi, premettiamo alcune considerazioni relative ai sistemi ∞^{n-1} di rette dello spazio S_n.

Un tale sistema lo potremo individuare così: Dare le coordinate $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ del punto P di ciascuna retta, comune ad una ipersuperficie iniziale $\sum$, e i coseni direttori $X_1, X_2, \ldots X_n$ di questa, in funzione delle coordinate curvilinee di P su $\sum$. Allora le coordinate di un punto posto sulla retta, e avente l'ascissa ρ rispetto al punto $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, saranno così espresse:

$$\xi_i = x'_i + \rho X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{26}$$

Ricerchiamo se vi sono delle curve su $\sum$ tali che le ∞^1 rette del sistema, passanti pei punti di una di esse, costituiscano una sviluppabile. Dalle (26) ricaviamo che lungo una tale curva debbono essere soddisfatte le equazioni:

$$\sum_i \frac{\partial x'_k}{\partial u_i} du_i + \rho \sum_i \frac{\partial X_k}{\partial u_i} du_i = \lambda X_k,$$

essendo λ un fattore infinitesimo.

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\left\{\begin{aligned} c_{ik} &= S_s \frac{\partial X_s}{\partial u_i} \frac{\partial X_s}{\partial u_k} \\ a_{ik} &= S_s \frac{\partial x'_s}{\partial u_i} \frac{\partial X_s}{\partial u_k}; \end{aligned}\right. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n-1) \tag{27}$$

notiamo che, in generale, non sarà: $a_{ik} = a_{ki}$.

Moltiplicando le ultime equazioni ordinatamente per:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_j}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u_j}, \quad \ldots \quad \frac{\partial X_n}{\partial u_j}$$

*) Luigi Bianchi, l. c., vol. I, pag. 481.

e sommando, col tener conto delle (27), otteniamo un'equazione, la quale per $j = 1, 2, \ldots n-1$, dà luogo alle seguenti:

$$(28)\quad \begin{cases} (a_{11} + \rho c_{11})du_1 + (a_{12} + \rho c_{12})du_2 + \cdots + (a_{1,n-1} + \rho c_{1,n-1})du_{n-1} = 0 \\ (a_{21} + \rho c_{21})du_1 + (a_{22} + \rho c_{22})du_2 + \cdots + (a_{2,n-1} + \rho c_{2,n-1})du_{n-1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n-1,1} + \rho c_{n-1,1})du_1 + (a_{n-1,2} + \rho c_{n-1,2})du_2 + \cdots \\ \qquad \cdots + (a_{n-1,n-1} + \rho c_{n-1,n-1})du_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Da queste risulta che ρ deve essere necessariamente una radice dell'equazione algebrica di grado $n-1$ in ρ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \rho c_{11} & a_{12} + \rho c_{12} & \ldots & a_{1,n-1} + \rho c_{1,n-1} \\ a_{21} + \rho c_{21} & a_{22} + \rho c_{22} & \ldots & a_{2,n-1} + \rho c_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} + \rho c_{n-1,1} & a_{n-1,2} + \rho c_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} + \rho c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Inversamente, per ognuna delle $n-1$ radici di quest'ultima, il sistema di equazioni differenziali (28) ci dà un sistema ∞^{n-2} di curve dell'ipersuperficie Σ, a ciascuna delle quali corrisponde una sviluppabile. Naturalmente, ove la radice ρ_k che si sostituisce in (28) sia immaginaria, le sviluppabili del sistema corrispondente sono pure immaginarie. Possiamo dunque dire che:

Le rette di un sistema ∞^{n-1} si possono sempre distribuire in $n-1$ sistemi costituiti da ∞^{n-2} sviluppabili (reali, od immaginarie), ciascuno.

Sopra ogni raggio del sistema i punti aventi per ascisse $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}$, sono quelli nei quali esso tocca gli spigoli di regresso delle $n-1$ sviluppabili che lo contengono.

Supponiamo che si abbia: $c_{ik} = 0$ per $i \neq k$. Allora dalle (28) risulta che: *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè le sviluppabili del sistema corrispondano alle linee coordinate $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ di Σ, è che si abbia: $a_{ik} = a_{ki} = 0$ per $i \neq k$.*

Si dirà che un sistema ∞^{n-1} di rette è *normale*, quando esista una ipersuperficie, e quindi ∞^1, che siano normali a tutte le rette del sistema.

Evidentemente, la funzione ρ di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ da sostituirsi nelle (26), affinchè queste ci dieno un'ipersuperficie normale al sistema, dovrà essere tale da soddisfare alla relazione:

$$\mathop{S}_i X_i d\xi_i = 0,$$

ossia, poichè è:

$$d\xi_i = dx'_i + X_i d\rho + \rho dX_i,$$

alla seguente:

$$d\rho + \mathop{S}_{i} X_i \, dx'_i = 0.$$

Quest'ultima, ponendo:

$$\mathop{S}_{i} X_i \frac{\partial x'_i}{\partial u_k} = V_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n - 1),$$

può anche scriversi così:

$$d\rho + \sum_k V_k \, du_k = 0.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè quest'ultima sia soddisfatta da una funzione ρ, ossia affinchè il sistema di rette sia normale sono le seguenti:

$$\frac{\partial V_k}{\partial u_i} = \frac{\partial V_i}{\partial u_k},$$

che ci dànno le altre, equivalenti: $a_{ik} = a_{ki}$.

Quando quest'ultime risultino soddisfatte, il sistema è normale, e, le ∞^1 ipersuperficie ad esso normali si ottengono ponendo:

$$\rho = -\int \sum_k V_k \, du_k + C,$$

con C costante arbitraria.

8. Riprendiamo le nostre considerazioni sui sistemi ciclici.

Sia $\mathfrak{S}_1$ un'ipersuperficie avente l'immagine sferica delle linee di curvatura comune con $\mathfrak{S}$. La normale ad $\mathfrak{S}_1$ in un suo punto P' incontrerà l'iperpiano tangente ad $\mathfrak{S}$ nel punto corrispondente P, normalmente in un certo punto $Q \equiv (x'_i)$. Se diciamo $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ le coordinate di Q rispetto al sistema di assi costituito dalle tangenti alle linee coordinate di $\mathfrak{S}$ passanti per P, avremo:

$$x'_s = x_s + \sum_k A_k X_s^{(k)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n). \tag{29}$$

Consideriamo il sistema delle ∞^{n-1} normali di $\mathfrak{S}_1$ e prendiamo su ciascuna di esse il punto Q ora detto, come origine. Per la nota proprietà caratteristica delle linee di curvatura, le sviluppabili di tale sistema corrispondono alle linee coordinate $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ dell'ipersuperficie luogo del punto Q, data dalle (29).

Essendo in questo caso:

$$c_{ik} = \mathop{S}_{s} \frac{\partial X_s}{\partial u_i} \frac{\partial X_s}{\partial u_k} = b'_{ik} = 0,$$

per $i \neq k$, così dovranno sussistere le seguenti:

$$a_{ik} = \underset{s}{\mathrm{S}} \frac{\partial x'_s}{\partial u_i} \frac{\partial X_s}{\partial u_k} = 0,$$

$$a_{ki} = \underset{s}{\mathrm{S}} \frac{\partial x'_s}{\partial u_k} \frac{\partial X_s}{\partial u_i} = 0.$$

Tenendo conto delle (8), (9), delle (29) e dell'essere:

$$\underset{s}{\mathrm{S}} \frac{\partial x_s}{\partial u_i} \frac{\partial X_s}{\partial u_k} = 0 \qquad (i \neq k)$$

queste ultime si trasformano nelle altre:

$$\left.\begin{aligned} a_{ik} &= -\frac{\sqrt{b_k}}{R_k}\left(\frac{\partial A_k}{\partial u_i} - \frac{A_i}{\sqrt{b_k}}\frac{\partial \sqrt{b_i}}{\partial u_k}\right) = 0 \\ a_{ki} &= -\frac{\sqrt{b_i}}{R_i}\left(\frac{\partial A_i}{\partial u_k} - \frac{A_k}{\sqrt{b_i}}\frac{\partial \sqrt{b_k}}{\partial u_i}\right) = 0 \end{aligned}\right\} (i, k = 1, 2, \ldots n-1),$$

dalle quali si trae dapprima:

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial u_i} &= \frac{A_i}{\sqrt{b_k}}\frac{\partial \sqrt{b_i}}{\partial u_k} \\ \frac{\partial A_i}{\partial u_k} &= \frac{A_k}{\sqrt{b_i}}\frac{\partial \sqrt{b_k}}{\partial u_i}, \end{aligned}\right. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n-1)$$

quindi:

$$\frac{\partial(A_k\sqrt{b_k})}{\partial u_i} = \frac{\partial(A_i\sqrt{b_i})}{\partial u_k}. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n-1)$$

Queste ci dicono che esiste una funzione ψ delle variabili $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, la quale soddisfa alle relazioni:

$$(31) \qquad A_k = \frac{1}{\sqrt{b_k}}\frac{\partial \psi}{\partial u_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1).$$

Sostituendo questa espressione di A_k nella prima delle (30), vediamo che ψ soddisfa al sistema di equazioni a derivate parziali (15).

Ciò posto, se consideriamo il sistema ciclico normale ad S, corrispondente all'integrale ψ del sistema (15), le seconde delle (16) ci permettono di scrivere le (31) così:

$$(32) \qquad A_k = -\frac{\psi}{R}\cos\alpha_k.$$

Dalle (31) segue che: *Nota un'ipersuperficie* S_1 *avente la stessa immagine sferica delle linee di curvatura, di* S, *esistono* ∞^1 *sistemi ciclici normali ad* S, *i quali si ottengono con quadrature.*

Le (32) ci permettono di completare il teorema precedente come segue:

I piani dei cerchi di ciascuno degli ∞^1 sistemi ciclici suddetti sono quelli individuati dalle coppie di normali ad S e ad S_1, in due punti corrispondenti.

Inversamente, dato un sistema ciclico normale ad S, le seconde delle (16) potranno servire a determinare ψ per quadrature, a meno di un fattore costante. Tenendo conto delle (31), le (29) ci dànno una ipersuperficie. Per ogni punto $(u_1, u_1, \ldots u_{n-1})$ di questa facciamo passare una retta avente l'orientazione $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, della normale ad S nel punto $(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$. Otterremo così un sistema ∞^{n-1} di rette, il quale sarà normale, e ciò per il fatto che si ha per esso: $a_{ki} = a_{ik} = 0$ per $i \neq k$. Poichè si ha poi:

$$V_k = \underset{i}{S} X_i \frac{\partial x'_i}{\partial u_k} = \frac{A_k \sqrt{b_k}}{R_k} = \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi}{\partial u_k},$$

così, ricordando l'ultimo risultato ottenuto nel precedente paragrafo, vediamo che le ∞^1 ipersuperficie normali al sistema si otterranno con quadrature ponendo nelle formole:

$$\xi_i = x'_i - W X_i,$$

che dànno le coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ di un punto mobile sur una di tali superficie, in luogo di x'_i le espressioni date dalle (29), e:

$$W = \int \sum_k \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} d u_k + c,$$

essendo c una costante arbitraria. Queste ∞^1 ipersuperficie hanno comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura. Vediamo così che:

Noto un sistema ciclico normale ad S, si ottengono, con quadrature, ∞^1 sistemi di ipersuperficie parallele, aventi comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura.

9. *Trasformazione di sistemi n^{upli} ortogonali.* — Consideriamo uno dei sistemi ciclici normali ad S, e sia S_1 una delle altre ipersuperficie normali a tale sistema. La S_1 sarà data dalle (21), quando in esse si pensi il parametro u_n eguale ad una costante. Dalla (24) risulta che l'elemento lineare $d s_1$ di S_1 sarà dato da:

$$d s_1^2 = \sum_k \left(\frac{\psi \dfrac{\partial \theta}{\partial u_k}}{\theta \dfrac{\partial W}{\partial u_k}} \right)^2 b'_k d u_k^2. \tag{33}$$

Poichè sopra S_1 le linee coordinate $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ sono linee di curvatura, così l'elemento lineare sferico rappresentativo ds'_1 di S_1 avrà la forma ortogonale, sarà cioè:

$$(34) \qquad ds_1'^2 = \sum_i b_i'' du_i^2.$$

Indicheremo gli elementi di S_1, analoghi a quelli di S, con gli stessi simboli affetti da un apice. Avremo allora, per la nota relazione esistente fra i coefficienti delle due forme (33) e (34):

$$(35) \qquad b_k'' = \frac{1}{R_k'^2} \left(\frac{\psi \frac{\partial \theta}{\partial u_k}}{\theta \frac{\partial W}{\partial u_k}} \right)^2 . b_k'.$$

Supponiamo ora che u_n sia nelle (21) non più costante, ma variabile, e deriviamole parzialmente rispetto ad u_n stesso; avremo:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_n} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial u_n} (\xi_i - x_i) + \theta X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Deriviamo anche la (22) rispetto ad u_n, e risolviamo la relazione così ottenuta rispetto a $\frac{\partial \theta}{\partial u_n}$, otterremo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_n} = - \frac{\theta^2}{\psi} (u_n + W).$$

Sostituendo nelle precedenti l'espressione così trovata di $\frac{\partial \theta}{\partial u_n}$, avremo:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_n} = \frac{u_n + W}{\psi} \theta \left\{ X_i \frac{\psi}{u_n + W} - (\xi_i - x_i) \right\}.$$

Se in quest'ultime si dà ad u_n il valore cui corrisponde S_1, e si osserva che, a causa della (24), è $\frac{1}{\theta} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_n} = X_i'$, esse assumono la forma seguente:

$$X_i' = X_i - \theta \frac{u_n + W}{\psi} \{ (u_n + W) X_i + \theta \nabla'(X_i, W) \}.$$

10. Facciamo corrispondere al punto di coordinate $X_1, X_2, \ldots X_n$ il punto $X_1', X_2', \ldots X_n'$, ove questi due sistemi di funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, si intendono avere i valori corrispondenti ad uno stesso sistema di valori di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$. In tal modo otterremo una trasformazione

dell'ipersfera fondamentale, in sè stessa. Applicando questa trasformazione, il sistema delle ipersuperficie coordinate $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$, $u_{n-1} = \text{cost.}$, si cambia in un nuovo sistema $(n-1)^{\text{uplo}}$, ortogonale dell'ipersfera. Ciò deriva dall'osservare che l'elemento lineare di quest'ultima, quando ci si riferisca al sistema trasformato, è:

$$ds_1'^2 = \mathrm{S}\, dX_i''^2 = \sum_i b_i'' du_i^2.$$

Se ora applichiamo i risultati sui sistemi ortogonali, dalla (24) si deduce, che i raggi principali di curvatura R_i' di S_1, saranno espressi come segue:

$$\frac{1}{R_i'} = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial \log\left(\dfrac{\psi\dfrac{\partial\theta}{\partial u_i}}{\theta\dfrac{\partial W}{\partial u_i}}\sqrt{b_i'}\right)}{\partial u_n} = -\frac{1}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u_i}}\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_n}\right)}{\partial u_i}.$$

Abbiamo già trovato che è:

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u_n} = -\theta\frac{u_n + W}{\psi},$$

quindi sarà:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u_n}\right)}{\partial u_i} = -\frac{\partial\left(\theta\dfrac{u_n + W}{\psi}\right)}{\partial u_i};$$

tenendo conto delle quali, le precedenti divengono:

$$R_i'\frac{\partial\left(\theta\dfrac{u_n + W}{\psi}\right)}{\partial u_i} - \frac{\partial\theta}{\partial u_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Riprendiamo ora le (35), e sostituiamoci le espressioni delle R_k' ricavate da quest'ultime, otterremo:

$$b_k'' = \left[\frac{\psi\dfrac{\partial\left(\theta\dfrac{u_n + W}{\psi}\right)}{\partial u_k}}{\theta\dfrac{\partial W}{\partial u_k}}\right]^2 . b_k'.$$

Concludendo possiamo dire:

« Sia dato un sistema ortogonale dell'ipersfera, riferendosi al quale, l'elemento lineare di questa assuma la forma: $\sum_i b_i' du_i^2$; sia poi S un'ipersuperficie avente quest'ultimo per elemento sferico, rappresentativo,

ed R_1, R_2, ... R_{n-1} ne sieno i raggi principali di curvatura. Indichi W un integrale del sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log \sqrt{b'_i}}{\partial u_k}\frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{\partial \log \sqrt{b'_k}}{\partial u_i}\frac{\partial W}{\partial u_k} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n-1);$$

si ponga:

$$\psi = \int \sum_k R_k \frac{\partial W}{\partial u_k} d u_k,$$

e si determini θ con la relazione:

$$-\frac{2\psi}{\theta} + \Delta'_1 W + (u_n + W)^2 = 0,$$

ove u_n è una costante qualsiasi, ed il parametro differenziale primo è preso rispetto alla forma $\sum_i b'_i d u_i^2$. Ciò posto, esiste una trasformazione dell'ipersfera in sè, per la quale il suddetto sistema ortogonale si trasforma in un altro, della stessa specie, che assunto come sistema di riferimento dà la seguente forma all'elemento lineare dell'ipersfera:

$$d s^2 = \sum_k \left[\frac{\psi \dfrac{\partial\left(\theta \dfrac{u_n + W}{\psi}\right)}{\partial u_k}}{\theta \dfrac{\partial W}{\partial u_k}} \right]^2 b'_k d u_k^2 \text{ ».}$$

I sistemi ortogonali che si deducono dal dato, per mezzo di questa trasformazione, dipendono da $n-1$ funzioni arbitrarie, oltre che da costanti pure arbitrarie. Infatti, come è noto, l'integrale generale del sistema (25) contiene $n-1$ funzioni arbitrarie di una variabile, ciascuna.

11. *Sistemi ciclici normali ad un'ipersfera, o ad un iperpiano.*

Del sistema (15) che, coi simboli delle derivate covarianti, può anche scriversi:

$$\psi_{lm} = 0 \qquad (l, m = 1, 2, \dots n-1)\, l \neq m,$$

sono integrali particolari le coordinate x_1, x_2, ... x_n del punto generico di S, e quindi, come è ben facile il verificare, anche la funzione:

$$\rho = \mathop{S}_i x_i^2.$$

Vediamo di caratterizzare i sistemi ciclici corrispondenti agli integrali: x_1, x_2, ... x_n, ρ, ora detti.

Consideriamo dapprima la soluzione x_r, con r qualsiasi. Si ha ma-

nifestamente:

$$\Delta_1 x_r = \sum_i \frac{1}{b_i}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_i}\right)^2 = \sum_i X_r^{(i)2} = 1 - X_r^2,$$

percui dalle (16) ricaviamo:

$$R^2 = \frac{x_r^2}{\Delta_1 x_r} = \frac{x_r^2}{1 - X_r^2},$$

$$R \cos \alpha_k = -\frac{R^2}{x_r} X_r^{(k)}.$$

Da queste risulta che è:

$$y_r = x_r + R(\cos \alpha_1 X_r^{(1)} + \cos \alpha_2 X_r^{(2)} + \cdots + \cos \alpha_{n-1} X_r^{(n-1)}) = 0,$$

ossia i centri dei circoli del sistema giacciono nell'iperpiano $y_r = 0$. In questo caso si ha manifestamente:

$$\mathfrak{M}_i = \frac{x_r}{R} \frac{X_r X_i}{1 - X_r^2} \qquad (i \neq r)$$

$$\mathfrak{M}_r = -\frac{x_r}{R};$$

le quali si possono anche scrivere così:

$$-\mathfrak{M}_i \frac{x_r}{R} + X_r X_i = 0 \qquad (i \neq r)$$

$$-\mathfrak{M}_r \frac{x_r}{R} + X_r X_r = 1.$$

Poichè le due orientazioni $(\mathfrak{M}_i)$ e (X_i) giacciono nel piano del cerchio $(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$, così queste ultime ci dicono, che l'orientazione normale all'iperpiano $y_r = 0$, giace anch'essa in questo piano.

Il sistema ciclico normale ad S, corrispondente all'integrale x_r di (15), ha dunque tutti i suoi cerchi normali all'iperpiano: $y_r = 0$.

12. Consideriamo ora l'integrale $\rho = \underset{i}{S} x_i^2 - c$, con c costante.

Si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{b_r}} \frac{\partial \rho}{\partial u_r} = 2 \underset{i}{S}\, x_i X_i^{(r)} = 2 W_r,$$

indicando W_r la distanza dell'origine delle coordinate dall'iperpiano individuato, dalla normale all'ipersuperficie nel punto $P \equiv (x_1, x_2, \ldots x_n)$, insieme alle tangenti in P alle linee coordinate di S passanti per questo punto, esclusa la u_r. Posto: $W_n = \underset{i}{S} x_i X_i$, sussiste la relazione:

$$W_n^2 + \sum_r W_r^2 = \rho + c,$$

percui avremo:

$$\Delta_1 \rho = 4 \sum_r W_r^2 = 4(\rho + c - W_n^2).$$

Dalle (16) si traggono le seguenti:

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} R^2 &= \frac{\rho^2}{\Delta_1 \rho} = \frac{\rho^2}{4(\rho + c - W^2)}, \\ R \cos \alpha_k &= -2 \frac{R^2}{\rho} W_k. \end{aligned} \right.$$

Se indichiamo con δ la distanza dell'origine delle coordinate dal centro $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ del cerchio, passante per il punto $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, avremo, tenendo conto delle (10):

$$\delta^2 = \mathop{S}_i y_i^2 = \rho + c + R^2 + 2R \sum_k W_k \cos \alpha_k.$$

Quest'ultima, a causa delle (36), ci dà l'altra:

$$\delta^2 - R^2 = c;$$

la quale ci dice che: Allorchè è $c > 0$, tutti i cerchi del sistema sono normali all'ipersfera:

$$\mathop{S}_i \xi_i^2 = c;$$

quando è $c = 0$ essi passano tutti per l'origine; quando è $c = -c'$, con $c' > 0$, essi tagliano in punti diametralmente opposti l'ipersfera reale:

$$\mathop{S}_i \xi_i^2 = -c'.$$

I sistemi ciclici ultimamente considerati, e quelli del § 11 godono della proprietà, che i piani degli ∞^{n-1} cerchi passano tutti per uno stesso punto. È molto facile, generalizzando la dimostrazione che se ne dà quando lo spazio ambiente è a tre dimensioni, il provare il seguente teorema:

Se tutti i piani dei cerchi di un sistema ciclico passano per uno stesso punto a distanza finita, tali cerchi sono normali ad un'ipersfera (reale, o immaginaria), avente il suo centro nel punto.

Se il detto punto comune ai piani del sistema è all'infinito, i cerchi sono normali ad uno stesso iperpiano.

13. Per dimostrare il teorema enunciato nel precedente paragrafo, procediamo nel seguente modo.

Se indichiamo con η_1, η_2 le coordinate cartesiane di un punto A

del piano generico, di un sistema ciclico normale all'ipersuperficie iniziale S, rispetto ai due assi passanti per il centro del cerchio, e aventi orientazioni rispettive: $(\mathfrak{M}_i)$, (X_i), avremo per le coordinate $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ di A le espressioni seguenti:

$$\xi_i = x_i + R\mathfrak{M}_i - \eta_1 \mathfrak{M}_i + \eta_2 X_i .$$

L'ipotesi che tutti i piani del nostro sistema passino per uno stesso punto dello spazio, per es.: per le origine delle coordinate, porta con sè che dovranno essere soddisfatte, per ogni punto (u_i) di S, con un determinato sistema di valori corrispondente η_1, η_2, le relazioni:

$$x_i + R\mathfrak{M}_i + \eta_1 \mathfrak{M}_i + \eta_2 X_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Da queste segue, moltiplicandole per $\cos\alpha_r X_i^{(s)} - \cos\alpha_s X_i^{(r)}$, e sommandole poi membro a membro, col tener conto della espressione delle $\mathfrak{M}_i$ per mezzo delle $X_h^{(k)}$, e dei $\cos\alpha_r$:

$$\cos\alpha_r . W_s - \cos\alpha_s W_r = 0 \qquad \begin{pmatrix} r, s = 1, 2, \dots n-1 \\ r \neq s \end{pmatrix},$$

dove è: $W_r = \underset{i}{S} x_i X_i^{(r)}$. Tenendo conto delle formole già trovate:

$$(1) \qquad \frac{\sqrt{b_s}\cos\alpha_s}{R} = -\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u_s},$$

le precedenti ci permettono di dire che sussisteranno le altre:

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{b_s}}\frac{\partial\psi}{\partial u_s} = \lambda W_s \qquad (s = 1, 2, \dots n-1),$$

essendo λ una funzione di $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, iudipendente dall'indice s. Derivando quest'ultima rispetto ad u_r, con $r \neq s$, si trova:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{b_s}}\frac{\partial\psi}{\partial u_s}\right)}{\partial u_r} = W_s \frac{\partial\lambda}{\partial u_r} + \lambda\frac{\partial W_s}{\partial u_r}.$$

Ma ora osserviamo che si ha:

$$\frac{\partial W_s}{\partial u_r} = \frac{\partial(\underset{i}{S} x_i X_i^{(s)})}{\partial u_r} = \frac{1}{\sqrt{b_s}}\frac{\partial\sqrt{b_r}}{\partial u_s} W_r,$$

e che di più ψ soddisfa al noto sistema di equazioni a derivate parziali, il quale può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{b_s}}\frac{\partial\psi}{\partial u_s}\right)}{\partial u_r} = \frac{1}{\sqrt{b_r b_s}}\frac{\partial\sqrt{b_r}}{\partial u_s}\frac{\partial\psi}{\partial u_r} \qquad (r \neq s),$$

e allora la precedente ci darà:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots n - 1).$$

Si ha perciò $\lambda =$ cost. Dalle (2) di questo paragrafo, coll'osservare che si ha:

$$W_s = \frac{1}{\sqrt{b_s}} \mathop{\mathrm{S}}_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial u_s},$$

si deduce integrando:

$$\psi = \frac{\lambda}{2} \mathop{\mathrm{S}}_i x_i^2 + c$$

con c costante di integrazione; formola che dimostra la prima parte del teorema.

Supponiamo ora che tutti i piani del sistema ciclico che si considera passino per uno stesso punto all'infinito, per es: per il punto all'infinito sull'asse coordinato x_i.

Poichè, come abbiamo sopra osservato, si ha per un punto (ξ_k) del piano generico del sistema:

$$\xi_k = x_k + R\mathfrak{M}_k + \eta_1 \mathfrak{M}_k + \eta_2 X_k,$$

e poichè le differenze $\xi_k - x_k$ sono proporzionali ai coseni direttori della retta che unisce il punto (x_k) col punto (ξ_k), così avremo, manifestamente, che condizione necessaria e sufficiente affinchè i piani passino per il punto all'infinito suddetto, è che si possano determinare η_1, η_2 in modo da aversi:

$$\begin{aligned} R\mathfrak{M}_i + \eta_1 \mathfrak{M}_i + \eta_2 X_i &= \mu \\ R\mathfrak{M}_k + \eta_1 \mathfrak{M}_k + \eta_2 X_k &= 0 \qquad (k \neq i), \end{aligned}$$

ove è $\mu \neq 0$.

Moltiplicando la k^{esima} delle precedenti equazioni per:

$$\cos\alpha_r X_k^{(s)} - \cos\alpha_s X_k^{(r)}$$

e sommando, rispetto a k, da 1 ad n, troviamo:

$$\mu(\cos\alpha_r X_i^{(s)} - \cos\alpha_s X_i^{(r)}) = 0,$$

ossia, poichè è $\mu \neq 0$:

$$\cos\alpha_r X_i^{(s)} - \cos\alpha_s X_i^{(r)} = 0 \qquad (r \neq s).$$

Da quest'ultime e dalle (1) di questo paragrafo si traggono le seguenti:

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{b_k}} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} = \lambda X_i^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n - 1),$$

ove λ è una funzione di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, indipendente dall'indice k.

Partendo dalle (3), con procedimento analogo a quello usato nel

dimostrare la prima parte del teorema, si trova essere: $\lambda =$ costante, quindi dalle (3) stesse, integrando, otteniamo:

$$\psi = \lambda x_i + c,$$

con c costante di integrazione. Quest'ultima dimostra la seconda parte del teorema.

14. *L'ipersfera fondamentale riferita a coordinate polari.* — Limitandoci per semplicità al caso dello spazio a quattro dimensioni, riferiamo l'ipersfera fondamentale ad un sistema speciale di coordinate curvilinee. Esprimiamo le coordinate X_1, X_2, X_3, X_4, di un suo punto, in funzione dei tre parametri u_1, u_2, u_3 nel modo seguente:

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 \operatorname{sen} u_3 \\ X_2 &= \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 \cos u_3 \\ X_3 &= \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 \\ X_4 &= \cos u_1\,; \end{aligned}\right.$$

il suo elemento lineare sarà espresso così:

$$(2) \qquad d s'^2 = d u_1^2 + \operatorname{sen}^2 u_1\, d u_2^2 + \operatorname{sen}^2 u_1 \operatorname{sen}^2 u_2\, d u_3^2 .$$

Il sistema di equazioni a derivate parziali da cui dipende la determinazione delle ipersuperficie aventi (2) per elemento lineare, sferico, rappresentativo, essendone le linee u_1, u_2, u_3 quelle di curvatura, è questo:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} = \operatorname{cotg} u_1 \frac{\partial W}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_3} = \operatorname{cotg} u_1 \frac{\partial W}{\partial u_3},$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_3} = \operatorname{cotg} u_2 \frac{\partial W}{\partial u_3};$$

il suo integrale generale, che, come sappiamo, deve contenere tre funzioni arbitrarie di una sola variabile, ciascuna, è il seguente:

$$(3) \qquad W = \Phi_3(u_3) \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 + \Phi_2(u_2) \operatorname{sen} u_1 + \Phi_1(u_1),$$

ove Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono simboli di funzioni arbitrarie della rispettiva variabile indicata.

Trovato così W, si hanno subito le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4, di un punto della ipersuperficie generica della specie suddetta, poichè, come si sa, sussistono le formole *):

$$x_\nu = W X_\nu + \nabla'(W, X_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

essendo il parametro differenziale misto preso rispetto alla forma (2).

*) Luigi Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. I, pag. 479.

Tenendo conto delle (1) e (3) otteniamo quindi:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = \Phi_3(u_3)\,\mathrm{sen}\,u_3 + \Phi_3'(u_3)\cos u_3 \\ \quad + [\Phi_2(u_2)\,\mathrm{sen}\,u_2 + \Phi_2'(u_2)\cos u_2]\,\mathrm{sen}\,u_3 \\ \quad + [\Phi_1(u_1)\,\mathrm{sen}\,u_1 + \Phi_1'(u_1)\cos u_1]\,\mathrm{sen}\,u_2\,\mathrm{sen}\,u_3 \\ x_2 = \Phi_3(u_3)\cos u_3 - \Phi_3'(u_3)\,\mathrm{sen}\,u_3 \\ \quad + [\Phi_2(u_2)\,\mathrm{sen}\,u_2 + \Phi_2'(u_2)\cos u_2]\cos u_3 \\ \quad + [\Phi_1(u_1)\,\mathrm{sen}\,u_1 + \Phi_1'(u_1)\cos u_1]\,\mathrm{sen}\,u_2\cos u_3 \\ x_3 = \Phi_2(u_2)\cos u_2 - \Phi_2'(u_2)\,\mathrm{sen}\,u_2 \\ \quad + [\Phi_1(u_1)\,\mathrm{sen}\,u_1 + \Phi_1'(u_1)\cos u_1]\cos u_2 \\ x_4 = \Phi_1(u_1)\cos u_1 - \Phi_1'(u_1)\,\mathrm{sen}\,u_1\,. \end{cases}$$

Facciamo alcune considerazioni relativamente alle ipersuperficie così trovate, che sono, secondo la denominazione generale di DARBOUX *), a linee di curvatura coordinate.

Fissando in un modo qualsiasi le funzioni $\Phi_1(u_1)$, $\Phi_2(u_2)$, $\Phi_3(u_3)$ che compaiono nella (4), otterremo una V_3 speciale. Una linea di curvatura di questa, corrispondente al porre $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, con c_1, c_2 costanti qualunque è piana; infatti, facendo nelle (4) $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ risulta: $x_3 = C_3$, $x_4 = C_4$ con C_3, C_4 costanti; la linea considerata giace dunque nel piano comune ai due iperpiani $x_3 = C_3$, $x_4 = C_4$.

Anche le linee di curvatura $u_1 = c_1$, $u_3 = c_3$, con c_1, c_3 costanti, sono piane. Dalle (4) segue infatti che esse sono contenute nei piani individuati dalle coppie di iperpiani seguenti:

$$x_1\cos c_3 - x_2\,\mathrm{sen}\,c_3 = \Phi_3'(c_3)$$
$$x_4 = \Phi_1(c_1)\cos c_1 - \Phi_1'(c_1)\,\mathrm{sen}\,c_1\,.$$

Il primo di questi è facile vedere che è quello perpendicolare, nel punto di contatto, alla tangente nel punto $u_3 = c_3$ alla curva piana:

$$x_1 = \Phi_3(u_3)\,\mathrm{sen}\,u_3 + \Phi_3'(u_3)\cos u_3$$
$$x_2 = \Phi_3(u_3)\cos u_3 - \Phi_3'(u_3)\,\mathrm{sen}\,u_3$$
$$x_3 = 0\,, \qquad x_4 = 0\,.$$

Consideriamo ora la superficie V_2 seguente:

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \Phi_3(u_3)\mathrm{sen}u_3 + \Phi_3'(u_3)\cos u_3 + [\Phi_2(u_2)\mathrm{sen}u_2 + \Phi_2'(u_2)\cos u_2]\mathrm{sen}u_3\,, \\ \xi_2 = \Phi_3(u_3)\cos u_3 - \Phi_3'(u_3)\mathrm{sen}u_3 + [\Phi_2(u_2)\mathrm{sen}u_2 + \Phi_2'(u_2)\cos u_2]\cos u_3\,, \\ \xi_3 = \Phi_2(u_2)\cos u_2 - \Phi_2'(u_2)\mathrm{sen}u_2\,, \qquad \xi_4 = 0\,; \end{cases}$$

*) DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Tome I[er], pag. 135.

essa è manifestamente contenuta nell'iperpiano $x_4 = 0$, ed appartiene, considerata come immersa in questo spazio S_3, a tre dimensioni, alla classe delle superficie modanate, a sviluppabile direttrice cilindrica, superficie che, come è noto *), sono caratterizzate dalla proprietà di ammettere una deformazione continua che conserva le linee di curvatura.

Le linee coordinate u_2, u_3, sono appunto quelle di curvatura della V_2.

Consideriamo poi l'ipersuperficie cilindrica C_3, che si ottiene conducendo pei punti di V_2 le rette parallele all'orientazione dell'asse x_4.

I coseni direttori di quella normale alla V_2, in un suo punto qualsiasi, che è contenuta in S_3, sono i seguenti:

$$\eta_1 = \operatorname{sen} u_2 \operatorname{sen} u_3, \quad \eta_2 = \operatorname{sen} u_2 \cos u_3, \quad \eta_3 = \cos u_2, \quad \eta_4 = 0;$$

quelli della normale a C_3 in un punto qualsiasi della generatrice, passante per il punto (u_2, u_3) di V_2, sono questi stessi.

Ciò posto, dalle (4) segue facilmente che la linea di curvatura di V_3, che si ottiene ponendo $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$, con c_2, c_3 costanti qualunque, giace nel piano individuato dalla generatrice di C_3 passante per il punto (c_2, c_3) di V_2, e dalla normale a C_3 in questo stesso punto. Se si dicono poi ζ_1, ζ_2, rispettivamente, le coordinate di un punto della curva, rispetto agli assi, costituiti dalle due rette ultimamente dette, avremo:

$$(6) \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \Phi_1(u_1) \cos u_1 - \Phi_1'(u_1) \operatorname{sen} u_1, \\ \zeta_2 = \Phi_1(u_1) \operatorname{sen} u_1 + \Phi_1'(u_1) \cos u_1. \end{cases}$$

Possiamo concludere dunque che le ipersuperficie considerate, della classe (4), hanno le linee di curvatura dei tre sistemi, piane.

15. Poichè nelle (5), (6) compaiono le funzioni arbitrarie $\Phi_1(u_1)$, $\Phi_2(u_2)$, $\Phi_3(u_3)$, così la superficie (5) è la più generale della specie a cui appartiene, e la curva (6) piana rimane arbitraria. Potremo dunque, tenendo conto dei risultati ottenuti, dire che la più generale ipersuperficie della specie (4) si ottiene nel modo seguente:

« Si prenda in un S_3 dell'iperspazio ambiente S_4 una superficie V_2 modanata, a sviluppabile direttrice cilindrica, qualsiasi, indi si consideri la ipersuperficie C_3 luogo delle normali condotte dai punti di V_2 all'S_3.

---

*) Luigi Bianchi, l. c., Vol. II, pag. 45.

Tracciato in un piano Π una curva Γ, e due rette fra loro perpendicolari, arbitrarie; si facciano poi assumere a questo piano le ∞^2 posizioni che si ottengono facendo coincidere, ogni volta, una determinata delle rette suddette con una generatrice di C_3, e l'altra con la normale a C_3 nel punto in cui la generatrice stessa incontra V_2: il profilo piano Γ descrive frattanto la ipersuperficie V_3 della specie richiesta.

Su V_3 le ∞^2 linee Γ costituiscono un sistema di linee di curvatura; le linee degli altri due sistemi sono pure piane ».

Se indichiamo con $ds^2 = h_1 du_1^2 + h_2 du_2^2 + h_3 du_3^2$ l'elemento lineare della V_3, troviamo subito, per mezzo delle (4), le seguenti espressioni pei coefficienti h:

$$(7)\quad \begin{cases} h_1 = [\Phi_1(u_1) + \Phi''_1(u_1)]^2 \\ h_2 = [\Phi_2(u_2) + \Phi''_2(u_2) + \Phi_1(u_1)\operatorname{sen} u_1 + \Phi'_1(u_1)\cos u_1]^2 \\ h_3 = \{\Phi_3(u_3) + \Phi''_3(u_3) + \Phi_2(u_2)\operatorname{sen} u_2 + \Phi'_2(u_2)\cos u_2 \\ \qquad\qquad + [\Phi_1(u_1)\operatorname{sen} u_1 + \Phi'_1(u_1)\cos u_1]\operatorname{sen} u_2\}^2. \end{cases}$$

Calcolando poi, per mezzo delle (1) e delle (4), i coefficienti della seconda forma fondamentale, e tenendo conto delle (7), si trovano i valori che seguono per i tre raggi principali di curvatura di V_3.

$$R_1 = -[\Phi_1(u_1) + \Phi''_1(u_1)]$$

$$R_2 = -\frac{\Phi_2(u_2) + \Phi''_2(u_2) + \Phi_1(u_1)\operatorname{sen} u_1 + \Phi'_1(u_1)\cos u_1}{\operatorname{sen} u_1}$$

$$R_3 = -\frac{\Phi_3(u_3)+\Phi''_3(u_3)+\Phi_2(u_2)\operatorname{sen}u_2+\Phi'_2(u_2)\cos u_2+[\Phi_1(u_1)\operatorname{sen}u_1+\Phi'_1(u_1)\cos u_1]\operatorname{sen}u_2}{\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2}.$$

Da queste risulta immediatamente che, lungo una linea di curvatura $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, i primi due raggi di curvatura R_1, R_2 conservano un valore costante.

Per una qualsiasi ipersuperficie della specie (4) possiamo ottenere tutti i sistemi ciclici ∞^3, ad essa normali, con quadrature.

Basta infatti, come sappiamo, per far ciò, trovare la funzione ψ integrale del differenziale esatto:

$$d\psi = R_1 \frac{\partial W}{\partial u_1} du_1 + R_2 \frac{\partial W}{\partial u_2} du_2 + R_3 \frac{\partial W}{\partial u_3} du_3,$$

ove W è dato dalla (3), ed R_1, R_2, R_3 sono i raggi principali di curvatura della ipersuperficie considerata.

Se per es.: assumiamo per ipersuperficie iniziale quella corrispondente al fare: $\Phi_1(u_1) = c_1$, $\Phi_2(u_2) = c_2$, $\Phi_3(u_3) = c_3$, ove c_1, c_2, c_3

sono costanti fissate comunque, si trova facilmente:

$$\psi = -\Phi_3(u_3)(c_3+c_2\,\text{sen}\,u_2+c_1\,\text{sen}\,u_1\,\text{sen}\,u_2)-\Phi_2(u_2)(c_2+c_1\,\text{sen}\,u_1)-c_1\Phi_1(u_1).$$

Dalle (5), (6), segue che si ottiene la ipersuperficie particolare ora considerata, quando si prenda per V_2 nell'S_3 un tuoro, generato da un cerchio di raggio c_2, il cui centro descrive un cerchio di raggio c_3; e si prenda per profilo piano pure un cerchio di raggio c_1, col centro posto costantemente sulla V_2.

Le nostre considerazioni generali, sulla trasformazione dei sistemi ortogonali dell'ipersfera, ci permettono poi di concludere che:

Posto:

$$W = \Phi_3(u_3)\,\text{sen}\,u_1\,\text{sen}\,u_2 + \Phi_2(u_2)\,\text{sen}\,u_1 + \Phi_1(u_1),$$

$$\begin{aligned}\lambda = \Delta'_1 W + (u_4+W)^2 &= [\Phi_3(u_3)\cos u_1\,\text{sen}\,u_2 + \Phi_2(u_2)\cos u_1 + \Phi'_1(u_1)]^2 \\ &+ [\Phi_3(u_3)\cos u_2 + \Phi'_2(u_2)]^2 + \Phi'^2_3(u_3) \\ &+ [\Phi_3(u_3)\,\text{sen}\,u_1\,\text{sen}\,u_2 + \Phi_2(u_2)\,\text{sen}\,u_1 + \Phi_1(u_1) + u_4]^2,\end{aligned}$$

ove u_4 indica una costante arbitraria, ed il parametro differenziale è preso rispetto all'elemento sferico (2), *la forma differenziale*:

$$\lambda^2\left[\left(\frac{\dfrac{\partial \frac{W+u_4}{\lambda}}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial W}{\partial u_1}}\right)^2 + \text{sen}^2 u_1\left(\frac{\dfrac{\partial \frac{W+u_4}{\lambda}}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial W}{\partial u_2}}\right)^2 + \text{sen}^2 u_1\,\text{sen}^2 u_2\left(\frac{\dfrac{\partial \frac{W+u_4}{\lambda}}{\partial u_3}}{\dfrac{\partial W}{\partial u_3}}\right)^2\right]$$

rappresenta l'elemento lineare dell'ipersfera fondamentale, e quindi anche dello spazio ellittico a tre dimensioni, di curvatura eguale ad uno, comunque si assumano le funzioni arbitrarie $\Phi_1(u_1)$, $\Phi_2(u_2)$, $\Phi_3(u_3)$.

Dalle (7) risulta che le linee di curvatura: $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$ sono geodetiche della V_3, e che le linee: $u_1 = c_1$, $u_3 = c_3$ sono, per un determinato c_1, qualunque sia c_3, linee geodetiche della varietà a due dimensioni, appartenente a V_3, che si ottiene ponendo: $u_1 = c_1$.

Queste superficie $u_1 = c_1$, che sono determinate dall'intersezione di V_3 con gli iperpiani $x_4 =$ costante, sono, considerate come immerse in questi spazi, delle superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica. Ciò risulta dalle prime tre formole (4), che, fattovi $u_1 = c_1$, divengono:

$$\begin{aligned}x_1 &= \Phi_3(u_3)\,\text{sen}\,u_3 + \Phi'_3(u_3)\cos u_3 \\ &+ \{[\Phi_2(u_2) + \Phi_1(c_1)\,\text{sen}\,c_1 + \Phi'_1(c_1)\cos c_1]\,\text{sen}\,u_2 + \Phi'_2(u_2)\cos u_2\}\,\text{sen}\,u_3\end{aligned}$$

$$x_2 = \Phi_3(u_3)\cos u_3 - \Phi'_3(u_3)\operatorname{sen} u_3$$
$$+\{[\Phi_2(u_2)+\Phi_1(c_1)\operatorname{sen} c_1+\Phi'_1(c_1)\cos c_1]\operatorname{sen} u_2+\Phi'_2(u_2)\cos u_2\}\cos u_3$$
$$x_3 = [\Phi_2(u_2)+\Phi_1(c_1)\operatorname{sen} c_1+\Phi'_1(c_1)\cos c_1]\cos u_2 - \Phi'_2(u_2)\operatorname{sen} u_2 .$$

I parametri u_2, u_3 sono quelli delle linee di curvatura della superficie $u_1 = c_1$.

16. *Un caso particolare.*—Se si fa nelle (4): $\Phi_2(u_2) = \Phi_3(u_3) = 0$, si ottiene un'ipersuperficie V_3, che, come subito si vede, è generata dal profilo (6), il quale rimane arbitrario, quando il piano, in cui questo è contenuto, ruota, diciamo così, attorno all'asse x_4, assumendo tutte le ∞^2 posizioni di cui è suscettibile. Queste ipersuperficie sono analoghe a quelle di ruotazione dello spazio ordinario, come apparirà anche dalle considerazioni seguenti.

Cambiamo il parametro u_1, assumendo come nuovo parametro, che chiameremo pure u_1, l'arco della curva (6), che potremo dire la *curva meridiana.* Allora le coordinate η_1, η_2 di un punto di questa, quando si prendano per assi coordinati nel suo piano l'asse x_4, e la retta di intersezione coll'iperpiano $x_4 = 0$, saranno:

$$\eta_1 = U(u_1), \quad \eta_2 = \int_{u_1^{(0)}}^{u_1} \sqrt{1 - U'^2(u_1)}\, du_1 + x_4^{(0)};$$

essendo $U(u_1)$ una funzione arbitraria di u_1, e $x_4^{(0)}$ la η_2 del punto della curva, corrispondente al valore $u_1^{(0)}$ del parametro.

Le (4) diverranno:

$$(4)^* \qquad \begin{cases} x_1 = U \operatorname{sen} u_2 . \operatorname{sen} u_3 \\ x_2 = U \operatorname{sen} u_2 . \cos u_3 \\ x_3 = U \cos u_2 \\ x_4 = \displaystyle\int_{u_1^{(0)}}^{u_1} \sqrt{1 - U'^2}\, du_1 + x_4^{(0)} . \end{cases}$$

Da queste risulta che la varietà $u_1 = c_1$, con c_1 costante qualsiasi, è una sfera, contenuta nell'iperpiano:

$$x_4 = \int_{u_1^{(0)}}^{c_1} \sqrt{1 - U'^2(u_1)}\, du_1 + x_4^{(0)},$$

con il centro nel punto in cui quest'ultimo incontra l'asse x_4, e il rag-

gio eguale ad $U(c_1)$. Le linee coordinate della V_3: $u_1 = c_1$, $u_3 = c_3$, con c_3 qualunque e c_1 fisso sono i meridiani della sfera $u_1 = c_1$, con i piani passanti per l'asse x_4; mentre le linee $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, con c_2 qualunque, sono i paralleli normali a questi meridiani.

È facile dedurre dalle (1) e dalle (4)* che le normali alla nostra V_3 si appoggiano all'asse x_4, e che di più tutte quelle condotte pei punti di una sfera $u_1 = c_1$ passano per uno stesso punto di quest'asse. Segue da quest'ultima proprietà che una linea qualsiasi, tracciata sopra una varietà $u_1 = c_1$ di V_3, è una linea di curvatura di quest'ultima.

Facendo nelle (8) $\Phi_2(u_2) = \Phi_3(u_3) = 0$, si trova che è: $R_2 = R_3$.

Dalle (4)* si trae per l'elemento lineare di V_3 l'espressione seguente:

$$ds^2 = du_1^2 + U^2 du_2^2 + U^2 \operatorname{sen}^2 u_2\, du_3^2. \tag{9}$$

17. L'equazione a derivate parziali per la funzione θ:

$$\Delta_1 \theta = 1,$$

ove il parametro differenziale è preso rispetto alla forma (9), si riduce alla seguente:

$$U^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u_2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3}\right)^2 = U^2. \tag{10}$$

Cerchiamo di soddisfarvi ponendo: $\theta = V_1(u_1) + V(u_2, u_3)$, ove V_1 è funzione della sola u_1, V delle sole u_2, u_3. Sostituendo nella precedente, si vede che dovrà essere:

$$U^2\left(\frac{dV_1}{du_1}\right)^2 - U^2 = -\left[\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)^2\right] = -k_1^2,$$

ove k_1 indica una costante arbitraria, reale. Da quest'ultima si trae:

$$V_1 = \pm \int \sqrt{U^2 - k_1^2}\, \frac{du_1}{U},$$

e l'altra:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)^2 = k_1^2.$$

Facendo in questa $V = V_2(u_2) + V_3(u_3)$, otteniamo:

$$\left(\frac{dV_2}{du_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 u_2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 u_2 = -\left(\frac{dV_3}{du_3}\right)^2 = -k_2^2,$$

con k_2 costante arbitraria, reale. Avremo dunque $V_2(u_2)$ espresso per mezzo di un integrale ellittico nel modo seguente:

$$V_2 = \pm \int \frac{\sqrt{k_1^2 \operatorname{sen}^2 u_2 - k_2^2}}{\operatorname{sen} u_2} d u_2$$
$$V_3 = k_2 u_3 .$$

Nella funzione:

$$\theta = V_1 + V_2 + V_3 = \pm \int \frac{\sqrt{U^2 - k_1^2}}{U} d u_1 \pm \int \frac{\sqrt{k_1^2 \operatorname{sen}^2 u_2 - k_2^2}}{\operatorname{sen} u_2} d u_2 + k_2 u_3$$

abbiamo un integrale dell'equazione a derivate parziali (10), con due costanti arbitrarie. Si otterranno quindi le equazioni in termini finiti delle linee geodetiche di V_3, eguagliando a costanti arbitrarie le derivate parziali di θ rispetto a k_1^2, k_2^2 *). Facendo ciò, troveremo:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{d u_1}{U \sqrt{U^2 - k_1^2}} \pm \int \frac{\operatorname{sen} u_2 \, d u_2}{\sqrt{k_1^2 \operatorname{sen}^2 u_2 - k_2^2}} = c_1 \\ & u_3 = \pm \int \frac{k_2 \, d u_2}{\operatorname{sen} u_2 \sqrt{k_1^2 \operatorname{sen}^2 u_2 - k_2^2}} + c_2 , \end{aligned} \right.$$

ove c_1, c_2 sono due nuove costanti arbitrarie. Corrispondentemente a una quaterna di valori di c_1, c_2, k_1^2, k_2^2, si hanno quattro combinazioni di segno, quindi quattro geodetiche, il corso reale delle quali si estende, unicamente, a quelle regioni della ipersuperficie nelle quali si ha, contemporaneamente:

$$k_1^2 < U^2 , \qquad \operatorname{sen}^2 u_2 > \frac{k_2^2}{k_1^2} .$$

Indichiamo ora con ψ l'angolo formato da una linea geodetica, con il meridiano passante per un suo punto qualsiasi. È subito visto che si ha:

$$\cos \psi = \frac{d u_1}{d s} ,$$

essendo $d s$ l'elemento d'arco di geodetica. Tenendo conto della (9), troveremo:

$$U \sqrt{\left(\frac{d u_2}{d u_1}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 u_2 \left(\frac{d u_3}{d u_1}\right)^2} = \operatorname{tang} \psi .$$

Differenziando le (11), si ottiene:

$$\left(\frac{d u_2}{d u_1}\right)^2 = \frac{k_1^2 \operatorname{sen}^2 u_2 - k_2^2}{U^2 \operatorname{sen}^2 u_2 (U^2 - k_1^2)} ,$$
$$\left(\frac{d u_3}{d u_1}\right)^2 = \frac{k_2^2}{U^2 \operatorname{sen}^4 u_2 (U^2 - k_1^2)} ;$$

*) BIANCHI, l. c., Vol. I, pag. 338.

quindi sostituendo nella precedente, ed elevando al quadrato si ha:

$$k_1^2 \cos^2 \psi = (U^2 - k_1^2) \operatorname{sen}^2 \psi,$$

o anche:

$$U \operatorname{sen} \psi = k_1 .$$

Questa relazione, che vale lungo una qualsiasi geodetica, esprime un teorema analogo a quello di CLAIRAUT per le superficie di ruotazione dell'ordinario spazio.

Pisa 1° Novembre 1904.

UMBERTO SBRANA.

SUR LES COMMUNS MULTIPLES DES EXPRESSIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

Par M. **Alf Guldberg**, à Christiania.

Adunanza dell'8 gennajo 1905.

Dans son excellent livre « *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* », M. S. PINCHERLE a établi les théorèmes les plus importants d'une théorie générale des équations linéaires aux différences finies. Dans cette Note je me permets de suppléer à quelques points des recherches de M. PINCHERLE.

1. Soient

$$P \equiv p_x^{(r)} y_{x+r} + p_x^{(r-1)} y_{x+r-1} + \cdots + p_x^{(1)} y_{x+1} + p_x^{(0)} y_x$$
$$R \equiv r_x^{(n)} y_{x+n} + r_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + r_x^{(1)} y_{x+1} + r_x^{(0)} y_x$$

deux expressions linéaires aux différences finies des ordres r et n et à coefficients rationnels. Un problème qui se pose de lui-même est de rechercher *le plus petit commun multiple de P et R,* c'est-à-dire, nous allons chercher à trouver une expression linéaire aux différences finies de l'ordre le plus petit et à coefficients rationnels, qui est divisible par P et R. Soit Z cette expression, nous aurons

$$Z \equiv SP \equiv QR. \tag{1}$$

La détermination des expressions linéaires aux différences finies S et Q se fait en formant les identités *):

*) Nous utilisons dans les lignes qui suivent une méthode analogue à celle employée par M. HEFFTER dans son intéressant article: *Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse* [CRELLE's Journal, t. CXVI (1896), pp. 157-166].

$$
\begin{aligned}
P_x &\equiv p_x^{(r)} y_{x+r} + p_x^{(r-1)} y_{x+r-1} + \cdots + p_x^{(0)} y_x \\
P_{x+1} &\equiv p_{x+1}^{(r)} y_{x+r+1} + p_{x+1}^{(r-1)} y_{x+r} + \cdots + p_{x+1}^{(0)} y_{x+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{x+n} &\equiv p_{x+n}^{(r)} y_{x+r+n} + p_{x+n}^{(r-1)} y_{x+r-1+n} + \cdots + p_{x+n}^{(0)} y_{x+n} \\
R_x &\equiv r_x^{(n)} y_{x+n} + r_x^{(n-1)} y_{x+n-1} + \cdots + r_x^{(0)} y_x \\
R_{x+1} &\equiv r_{x+1}^{(n)} y_{x+n+1} + r_{x+1}^{(n-1)} y_{x+n} + \cdots + r_{x+1}^{(0)} y_{x+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
R_{x+r} &\equiv r_{x+r}^{(n)} y_{x+n+r} + r_{x+r}^{(n-1)} y_{x+r+n-1} + \cdots + r_{x+r}^{(0)} y_{x+r}.
\end{aligned}
$$

En multipliant les $n+1$ premières lignes par les coefficients $s_x^{(0)}, s_x^{(1)}, \ldots s_x^{(n)}$ de S et en les ajoutant, et en multipliant les $r+1$ dernières lignes par les coefficients $q_x^{(0)}, q_x^{(1)}, \ldots q_x^{(r)}$ de Q, et en les ajoutant, comparant alors les coefficients des $y_x, y_{x+1}, \ldots y_{x+n+r}$ des deux expressions ainsi obtenues, nous aurons

$$
\begin{gathered}
s_x^{(0)} p_x^{(0)} = q_x^{(0)} r_x^{(0)} \\
s_x^{(0)} p_x^{(1)} + s_x^{(1)} p_{x+1}^{(0)} = q_x^{(0)} r_x^{(1)} + q_x^{(1)} r_{x+1}^{(0)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_x^{(n-1)} p_{x+n-1}^{(r)} + s_x^{(n)} p_{x+n}^{(r-1)} = q_x^{(r-1)} r_{x+r-1}^{(n)} + q_x^{(r)} r_{x+r}^{(n-1)} \\
s_x^{(n)} p_{x+n}^{(r)} = q_x^{(r)} r_{x+r}^{(n)}.
\end{gathered}
$$

De ces $n+r+1$ équations linéaires et homogènes entre les $n+r+2$ fonctions inconnues s_x et q_x, les s_x et q_x se déterminent uniformément, abstraction faite d'un facteur commun.

Le plus petit commun multiple de P et R est donc au plus de l'ordre $n+r$.

La condition nécessaire et suffisante pour que Z soit de l'ordre moindre de $n+r$ se déduira facilement. En effet, $s_x^{(n)}$ (et $s_x^{(0)}$) s'annule ou devient arbitraire quand ($r_x^{(n)} \neq 0$) le déterminant

$$
\Delta_x = \begin{vmatrix}
p_x^{(0)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & r_x^{(0)} & 0 & \ldots & 0 \\
p_x^{(1)} & p_{x+1}^{(0)} & 0 & \ldots & 0 & r_x^{(1)} & r_{x+1}^{(0)} & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & p_{x+n-1}^{(r)} & 0 & 0 & \ldots & r_{x+r-1}^{(n)}
\end{vmatrix}
$$

s'annule identiquement. La même condition s'obtient aussi si Q est de l'ordre moindre de r.

La condition nécessaire et suffisante pour que le plus petit commun multiple de P et R soit de l'ordre $n+r$ est $\Delta_x \neq 0$.

2. Si

$$Z \equiv SP \equiv QR$$

est d'un ordre moindre de $n+r$, l'ordre σ de S sera $< n$, et l'ordre $r-n+\sigma$ de Q sera $< r$. Soient maintenant

$y_x^{(P_1)} \dots y_x^{(P_r)}$ un système fondamental d'intégrales de $P = 0$
$y_x^{(S_1)} \dots y_x^{(S_\sigma)}$ » » » $S = 0$
$y_x^{(R_1)} \dots y_x^{(R_n)}$ » » » $R = 0$
$y_x^{(Q_1)} \dots y_x^{(Q_{r-n+\sigma})}$ » » » $Q = 0$

et

$\eta_x^{(\lambda)}$ une intégrale de $Py_x = y_x^{(S_\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$,
$y_x^{(\lambda)}$ » $Ry_x = y_x^{(Q_\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots r-n+\sigma)$.

Un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$SP \equiv QR = 0$$

est donc *)

$$y_x^{(R_1)} \dots y_x^{(R_n)},\ y_x^{(1)} \dots y_x^{(r-n+\sigma)}$$

et

$$y_x^{(P_1)} \dots y_x^{(P_r)},\ \eta_x^{(1)} \dots \eta_x^{(\sigma)};$$

on aura par suite

$$y_x^{(P_1)} = A_{11} y_x^{(R_1)} + \dots + A_{1n} y_x^{(R_n)} + B_{11} y_x^{(1)} + \dots + B_{1,n-r+\sigma} y_x^{(r-n+\sigma)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_x^{(P_r)} = A_{r1} y_x^{(R_1)} + \dots + A_{rn} y_x^{(R_n)} + B_{r1} y_x^{(1)} + \dots + B_{rn-r+\sigma} y_x^{(r-n+\sigma)},$$

où les A et B sont des constantes. En éliminant les $y_x^{(\lambda)}$ entre $r-n+\sigma+1$ de ces r équations, le premier membre donnera une intégrale de $P=0$ et le second membre une intégrale de $R = 0$.

Si le plus petit commun multiple de P et R est d'un ordre moindre de $n+r$, P et R admettent un commun diviseur.

L'inverse est évident. En effet, si P et R admettaient un commun diviseur T, on aurait

$$P \equiv P_1 T, \qquad R \equiv R_1 T,$$

où l'ordre r_1 de $P_1 < r$, l'ordre n_1 de $R_1 < n$. Le plus petit commun multiple de P_1 et R_1 est au plus de l'ordre $n_1 + r_1$, et celui-ci de P et R est au plus de l'ordre

$$n_1 + r_1 + r - r_1 = n_1 + r < n + r.$$

En résumé, si P et R n'admettent aucun commun diviseur, le plus petit commun multiple de P et R est de l'ordre $n+r$ et inversement. Si P et R admettent un commun diviseur de l'ordre σ, leur plus petit commun multiple est de l'ordre $n+r-\sigma$ et inversement.

*) S. Pincherle, loc. cit., p. 228.

Cela posé, il doit être convenable d'appeler le déterminant Δ_x *la résultante des deux équations* $P = 0$ *et* $R = 0$.

3. Supposons maintenant que P et R n'aient aucun commun diviseur; leur résultante Δ_x est donc différente de zéro. Il est facile de voir, que l'on peut déterminer une expression linéaire aux différences finies P_{-1} de l'ordre $n - 1$, définie par l'équation

$$P_{-1} P y_x \equiv y_x + T R y_x, \tag{5}$$

où T est une expression linéaire aux différences finies de l'ordre $r - 1$. En effet, les coefficients de P_{-1} et T se déterminent par un système d'équations linéaires non homogènes dant le déterminant est Δ_x.

D'après l'équation (5) nous avons

$$P_{-1} P y_x^{(R)} \equiv y_x^{(R)}; \tag{6}$$

appellons donc P_{-1} *l'expression inverse à* P *par rapport au module* R.

Reprenons maintenant l'équation (1)

$$SP = QR;$$

si $y_x^{(S)}$ désigne une intégrale de $S = 0$ et $y_x^{(R)}$ une intégrale de $R = 0$, nous avons

$$P y_x^{(R)} \equiv y_x^{(S)}. \tag{7}$$

Quand P et R n'ont aucun commun diviseur on obtiendra pour chaque intégrale de $R = 0$ une intégrale de $S = 0$. Nous aurons de plus

$$P_{-1} y_x^{(S)} \equiv y_x^{(R)}, \tag{8}$$

une équation toute analogue à l'équation (7), l'équation $P_{-1} = 0$ et l'équation $S = 0$ n'ont donc aucune intégrale commune, et par conséquent $R P_{-1} = 0$ admet toutes les intégrales de $R = 0$. Ceci nous conduit à l'équation :

$$R P_{-1} \equiv Q_{-1} S. \tag{9}$$

D'après les équations (9) et (1), on aura

$$R P_{-1} P \equiv Q_{-1} S P \equiv Q_{-1} Q R$$

et ainsi à cause de l'équation (5)

$$Q_{-1} Q R y_x \equiv R(y_x + T R y_x) \equiv R y_x + R T R y_x$$

ou

$$Q_{-1} Q y_x \equiv y_x + R T y_x;$$

c'est-à-dire Q_{-1} *est inverse à* Q *par rapport au module* T. Selon l'équivalence complète des expressions

$$R, \; P, \; Q, \; S$$

et

$$S, \ P_{-1}, \ Q_{-1}, \ R$$

nous aurons

(11) $$PP_{-1}y_x \equiv y_x + USy_x,$$

(12) $$QQ_{-1}y_x \equiv y_x + SUy_x,$$

c'est-à-dire, *P est inverse à P_{-1} par rapport au module S, et Q est inverse à Q_{-1} par rapport au module U,* où U est une expression linéaire aux différences finies de l'ordre $r-1$.

En résumé, si P et R n'ont aucun commun diviseur, nous avons:

$$(1)\ \ SP \equiv QR \quad et \quad (9)\ \ Q_{-1}S \equiv RP_{-1}$$

où S est de l'ordre r;

$$(5)\ \ P_{-1}Py_x \equiv y_x + TRy_x, \qquad (10)\ \ Q_{-1}Qy_x \equiv y_x + RTy_x$$

$$(11)\ \ PP_{-1}y_x \equiv y_x + USy_x, \qquad (12)\ \ QQ_{-1}y_x \equiv y_x + SUy_x$$

et les intégrales de $S=0$ et $R=0$ sont liées par les relations

$$(7)\ \ Py_x^{(R)} \equiv y_x^{(S)} \quad et \quad (8)\ \ P_{-1}y_x^{(S)} \equiv y_x^{(R)}.$$

4. Soient

(a) $$A \equiv a_x^{(m)}y_{x+m} + a_x^{(m-1)}y_{x+m-1} + \cdots + a_x^{(0)}y_x = 0$$

(b) $$B \equiv b_x^{(p)}z_{x+p} + b_x^{(p-1)}z_{x+p-1} + \cdots + b_x^{(0)}z_x = 0 \quad (p \leqq n)$$

deux équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels; je suppose que la transformation

$$z_x = c_x^{(0)}y_x + c_x^{(1)}y_{x+1} + \cdots + c_x^{(m-1)}y_{x+m-1}$$

fasse passer des intégrales de l'équation (a) aux intégrales de l'équation (b), les coefficients $c_x^{(0)}, c_x^{(1)} \ldots c_x^{(m-1)}$ étant des fonctions rationnelles de x. Je dis que *l'équation (b) est de la même espèce que l'équation (a)* *).

Cela posé, soit maintenant $r \leqq n-1$. L'équation $S=0$, définie par l'équation

$$SP \equiv QR$$

est alors de la même espèce que l'équation $R=0$; en effet, nous eûmes la relation

$$y_x^{(S)} = Py_x^{(R)}.$$

Vice versa, si $S=0$ est de la même espèce que $R=0$, l'expression SP est divisible par R,

$$SP \equiv QR,$$

*) Cfr. GULDBERG, Prace Matematyczno-Fizycznych, t. XVI.

et SP est le plus petit commun multiple de P et R; d'où cette proposition :

Une équation linéaire aux différences finies à coefficients rationnels $S = 0$ est de la même espèce que l'équation linéaire aux différences finies de l'ordre n à coefficients rationnels $R = 0$, s'il existe une expression linéaire aux différences finies à coefficients rationnels P, dont l'ordre $\leqq n - 1$, de manière que SP soit divisible par R.

On trouvera donc toutes les équations qui sont de la même espèce que $R = 0$ en variant P, dont l'ordre est $\leqq n - 1$, en toutes les manières possibles et en cherchant toute fois le plus commun multiple de P et R.

On est immédiatement conduit aux théorèmes suivants :

Si P et R n'ont aucun commun diviseur, S est de l'ordre n, et on a

$$y_x^{(S)} \equiv P y_x^{(R)} \qquad \textit{et} \qquad y_x^{(R)} \equiv P_{-1} y_x^{(S)}.$$

Si $R = 0$ est irréductible, toutes les équations qui sont de la même espèce sont de l'ordre n.

Si $R = 0$ est réductible, il existe des équations qui sont de la même espèce, dont l'ordre est moindre de n.

Soient

$$y_x^{(S)} \equiv P y_x^{(R)} \qquad \text{et} \qquad y_x^{(T)} \equiv P_1 y_x^{(S)}$$

où $y_x^{(T)}$ est une intégrale de $T = 0$, il vient

$$y_x^{(T)} \equiv P_1 P y_x^{(R)}.$$

Mettons de plus

$$P_1 P y_x \equiv K R y_x + P_2 y_x,$$

où l'ordre de P_2 est $\leqq n - 1$, on a alors

$$P_2 y_x^{(R)} \equiv P_1 P y_x^{(R)} \equiv y_x^{(T)},$$

d'où ces propositions :

Si une équation d'une certaine espèce est irréductible, toutes les équations de la même espèce sont irréductibles.

Si une équation d'une certaine espèce est réductible, toutes les équations de la même espèce sont réductibles ou d'un ordre moindre de n.

Christiania, décembre 1904.

A. GULDBERG.

SULLE INVOLUZIONI IRRAZIONALI NELLE CURVE IPERELLITTICHE.

Nota di **Ruggiero Torelli**, in Pisa *).

Adunanza del 26 febbraio 1905.

In questa Nota sono considerate le involuzioni irrazionali sulle curve iperellittiche. Il risultato principale a cui si arriva è il teorema del n° 5, esprimente una condizione necessaria e sufficiente perchè una curva iperellittica di genere p contenga una involuzione di ordine ν e genere π. Il teorema nel caso $p = 2$ era stato implicitamente dimostrato dall'HUMBERT, con considerazioni di indole diversa, nella sua Memoria *Sur les surfaces de* KUMMER *elliptiques* **).

1. È noto ***) che *sopra una curva razionale una serie algebrica semplicemente infinita di gruppi di n punti, di indice* 2 (cioè tale che pel punto generico della curva passino due gruppi) *è razionale*. Rappresentando infatti la curva colla C_n razionale normale di S_n, i gruppi della serie appartengono a degli S_{n-1}, e pel punto generico della curva passano due di tali S_{n-1}; quindi ****) ne passano due per ogni punto di S_n, ossia quegli S_{n-1} formano un inviluppo di seconda classe, epperò razionale.

*) Estratto dalla tesi di laurea, presentata nel dicembre 1904 alla R. Università di Pisa.

**) American Journal of Mathematics, vol. XVI (1894), pp. 221-253.

***) SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*. [Annali di Matematica, serie II, tomo XXII (1894), pp. 41-142], n° 67, nota.

****) SEGRE, loc. cit., n° 23, nota.

Ne segue questa proprietà, pure conosciuta *): *Se una curva contenente una g_2^1 possiede una involuzione γ_ν^1 di ordine ν e genere $\pi > 0$, questa è trasformata in sè dalla g_2^1*. Difatti, se ciò non fosse, sulla retta doppia rappresentatrice della g_2^1 la serie dei gruppi di ν punti corrispondenti ai gruppi di γ_ν^1 sarebbe riferibile biunivocamente alla γ_ν^1, e avrebbe l'indice 2; il che, pel teorema precedente, è assurdo.

Si osservi poi che, per una nota osservazione di LÜROTH, non può ogni gruppo della γ_ν^1 essere trasformato in sè dalla g_2^1, ossia la γ_ν^1 essere composta colla g_2^1. Le coppie di gruppi della γ_ν^1, trasformati l'un dell'altro mediante la g_2^1, formano una involuzione razionale (perchè composta colla g_2^1), rappresentata sulla retta doppia da una involuzione I_ν^1 di ordine ν **).

La γ_ν^1 quindi possiede una g_2^1, ossia è anche essa, come la curva sostegno, iperellittica (in particolare, ellittica). E vi saranno $2\pi + 2$ gruppi trasformati in sè dalla g_2^1.

2. Ricordiamo che una curva iperellittica di genere p si può sempre riferire alla curva piana:

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_i),$$

essendo le a opportuni valori tutti distinti, e i eguale a $2p + 2$ o $2p + 1$. Su questa le rette $x =$ cost. segnano una g_2^1, i cui punti doppi si hanno dando alla x i valori a, se $i = 2p + 2$; ovvero questi e il valore ∞, se $i = 2p + 1$.

Inversamente, sia $R(x)$ un polinomio di grado r, avente $2p + 2$ o $2p + 1$ radici a multiplicità dispari, cosicchè sarà $R(x) = [S(x)]^2\, T(x)$, ove $T(x)$ è un polinomio di grado $2p + 2$ o $2p + 1$ a radici tutte semplici. La curva:

$$(1) \qquad y^2 = R(x)$$

[che è di ordine r, e ha un punto $(r - 2)$-plo nel punto all'infinito dell'asse delle y] contiene una g_2^1, segata dalle rette $x =$ cost.; essa è di genere p, perchè in corrispondenza birazionale, data dalle formule:

$$x' = x \qquad y' = \frac{y}{S(x)},$$

*) ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*. [Questi Rendiconti, t. X (1896), pp. 30-35].

**) Indicheremo sempre con γ_ν^1 una involuzione irrazionale (semplicemente infinita) di ordine ν; con I_ν^1 una involuzione semplic. inf. di ordine ν sopra una retta.

coll'altra:

$$y'^2 = T(x').$$

Come subito si vede, sulla (1) i punti doppi della g_2^1 si hanno da quei valori di x che dànno punti critici *effettivi* pel radicale $\sqrt{R(x)}$; ossia dalle $2p+2$ radici a multiplicità dispari, ovvero dalle $2p+1$ radici a multiplicità dispari e dal valore $x=\infty$.

Una corrispondenza biunivoca fra due curve iperellittiche di genere $p>1$ (distinte o coincidenti), dovendo riferire biunivocamente le due g_2^1, induce fra le rette doppie una proiettività che trasforma l'uno nell'altro i due gruppi di punti di diramazione; e viceversa una tal proiettività dà luogo a *due* corrispondenze biunivoche fra le due curve *).

3. Si consideri la curva iperellittica di genere π:

$$\eta^2 = (\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2)\,\ldots\,(\xi - \alpha_{2\pi+2}). \tag{2}$$

Siano poi $f(x)$, $\varphi(x)$ due polinomi di grado ν, senza radici comuni (potendo però uno di essi avere delle radici ∞); effettuando sulla (2) la trasformazione:

$$\xi = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \qquad \eta = \frac{y}{[\varphi(x)]^{\pi+1}},$$

avremo la curva iperellittica:

$$y^2 = \prod_1^{2\pi+2}[f(x) - \alpha_i\varphi(x)]. \tag{3}$$

Questa cioè possiede una γ_ν^1 *di genere* π, riferibile birazionalmente alla (2), e rappresentata sulla retta doppia x dalla involuzione:

$$f(x) - \xi\varphi(x) = 0.$$

Le equazioni $f(x) - \alpha_i\varphi(x) = 0$ non hanno radici comuni; in generale esse avranno radici tutte semplici, e la (3) sarà di genere $\pi\nu + \nu - 1$. Ma può darsi che vi siano delle radici multiple, nel qual caso il genere della (3) riesce minore. Precisamente l'equazione di grado $(2\pi+2)\nu$:

$$\prod_1^{2\pi+2}[f(x) - \alpha_i\varphi(x)] = 0 \tag{4}$$

può avere delle radici a multiplicità pari ($\geqq 2$), e delle radici a multi-

*) SEGRE, loc. cit., n° 67.

plicità dispari ($\geqq 1$); queste ultime, essendo pari il grado $\nu(2\pi+2)$, saranno in numero pari $2p+2$ [e ciascun fattore $f(x)-\alpha_i\varphi(x)=0$ ne conterrà un numero pari o dispari, secondochè ν sia pari o dispari]; allora, per quanto si è detto al n° 2, sarà p il genere della (3).

Ricordiamo ora che se i punti multipli di una I_ν^1 sono un punto ρ_1-plo, uno ρ_2-plo, ..., uno ρ_h-plo (con $\rho_i \geqq 2$), si ha $\sum(\rho_i-1)=2(\nu-1)$, quindi $h \leqq 2(\nu-1)$ e $\sum\rho_i = 2(\nu-1)+h \leqq 4(\nu-1)$; talchè nel nostro caso avremo:

$$2p+2 \leqq \nu(2\pi+2) \leqq 2p+2+4(\nu-1),$$

donde:

$$(5)\qquad \frac{p-\nu+1}{\nu} \leqq \pi \leqq \frac{p+\nu-1}{\nu}.$$

Del resto la limitazione a destra vale in generale pel genere π di una γ_ν^1 su una curva di genere p, e si deduce dalla formula di ZEUTHEN:

$$y = 2(p-1) - 2\nu(\pi-1)$$

che dà il numero y dei punti doppi della γ_ν^1, osservando che questo numero non può esser negativo. La limitazione a sinistra si può anche dedurre da ciò che su una curva iperellittica di genere p il numero delle coppie comuni alla g_2^1 e a una γ_ν^1 di genere π deve esser finito (altrimenti la γ_ν^1 sarebbe composta colla g_2^1), e questo numero è *):

$$(6)\qquad C = \nu - 1 - p + \nu\pi,$$

cosicchè questa espressione non può risultare negativa **).

Le considerazioni fatte mostrano come si possano subito costruire, ed in infiniti modi, curve iperellittiche contenenti una involuzione (iperellittica) di ordine, genere e moduli assegnati.

4. Nel precedente numero abbiamo studiato la trasformazione razionale della curva (2) nella (3). Faremo adesso vedere che questo si

---

*) CASTELNUOVO, *Alcune osservazioni sulle serie irrazionali*, etc. [Rend. Acc. Lincei, vol. VII, 2° sem. 1891, pp. 294-299].

**) Supposto per semplicità che l'involuzione $f(x)-\xi\varphi(x)=0$ abbia solo dei punti *doppi*, l'equazione (4) avrà $2p+2$ radici semplici che danno i punti doppi della g_2^1 sulla (3), e $\frac{1}{2}[\nu(2\pi+2)-2p-2]=\nu-1-p+\nu\pi$ radici doppie che danno appunto le coppie comuni alla γ_ν^1 e alla g_2^1. Fuori dei gruppi $f(x)-\alpha_i\varphi(x)=0$ quella involuzione avrà altri $2(\nu-1)-\frac{1}{2}[\nu(2\pi+2)-2p-2]=p-1-\nu(\pi-1)$ punti doppi, ciascun dei quali dà due punti doppi della γ_ν^1, coniugati nella g_2^1.

può riguardare come il caso generale della trasformazione razionale di una curva iperellittica, cioè che: *se una curva iperellittica C è in corrispondenza* ($\nu\, 1$) *con una curva (iperellittica) K di genere π, si possono C e K riferire biunivocamente alle* (3), (2), *con una conveniente scelta delle costanti α e dei polinomi f, φ.*

Possiamo anzitutto supporre C rappresentata dall'equazione:

$$(7) \qquad y^2 = P(x),$$

ove P è un polinomio; allora la γ_ν^1 contenuta in C è rappresentata sulla retta doppia x da una involuzione:

$$(8) \qquad f(x) - \xi\varphi(x) = 0,$$

e le ascisse dei punti di un gruppo della γ_ν^1 danno un gruppo di questa involuzione.

Ora questa involuzione si può riguardare (n° 1) come l'ente razionale doppio che rappresenta la curva K; cosicchè se ai gruppi della γ_ν^1 trasformati in sè della g_2^1 di C corrispondon gruppi della detta involuzione (8), dati dai valori $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\pi+2}$ del parametro ξ, si potrà K riferire alla curva (2); e nella corrispondenza ($1\,\nu$) che risulta fra questa e la (7) a un punto della (2) di ascissa ξ corrispondono sulla (7) punti le cui ascisse sono le radici dell'equazione $f(x) - \xi\varphi(x) = 0$. Ma quest'ultimo fatto si verifica pure nella corrispondenza ($1\,\nu$) che intercede fra la (2) e la (3); ne segue che quest'ultima e la (7) sono in corrispondenza biunivoca, ove si dicano omologhi due punti corrispondenti allo stesso punto di (2), e aventi la stessa ascissa; il che prova quanto si è affermato.

5. Dalle precedenti considerazioni segue facilmente il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva iperellittica di genere p contenga una γ_ν^1 (iperellittica) di genere π è che coi $2p + 2$ punti di diramazione sulla retta doppia, contati ciascuno un numero dispari ($\geqq 1$) *di volte, ed eventualmente con altri punti, contati ciascuno un numero pari* ($\geqq 2$) *di volte, si possano formare $2\pi + 2$ gruppi di una involuzione I_ν^1 della retta.*

La condizione è sufficiente. Infatti supponiamo che l'asse delle x, ove si rappresenta doppiamente la curva iperellittica C, contenga una involuzione I_ν^1, sodisfacente la detta proprietà. Allora se $f(x) - \alpha_1\varphi(x) = 0, \ldots,$ $f(x) - \alpha_{2\pi+2}\varphi(x) = 0$ sono i $2\pi + 2$ gruppi di cui si parla nell'enunciato, la curva (3) ha sull'asse delle x (per quanto è detto al n° 2) lo

stesso gruppo di punti di diramazione della C, onde è razionalmente identica a questa. E siccome la (3) è in corrispondenza $(\nu\, 1)$ colla (2), così C conterrà una involuzione γ_ν^1, riferibile alla (2).

Inversamente se C contiene una γ_ν^1 di genere π, si potrà (n° 4), con una conveniente scelta delle costanti α e dei polinomi $f(x)$, $\varphi(x)$, riferire C alla (3); e sull'asse delle x il gruppo dei punti di diramazione di C sarà proiettivo (n° 2) a quello della (3). Ma quest'ultimo sodisfa evidentemente (per quanto è detto al n° 2) alla condizione di cui si parla nell'enunciato, quindi vi sodisferà il primo. Il teorema è così dimostrato.

È facile vedere che se la γ_ν^1 è composta, se essa è cioè una γ_μ^1 in una $\gamma_\rho^1 (\nu = \mu\rho)$, sarà la I_ν^1 una I_μ^1 in una I_ρ^1; e viceversa.

6. Affinchè una curva iperellittica di genere p ammetta una γ_2^1, è necessario e sufficiente (pel teor. precedente) che i $2p+2$ punti di diramazione sulla retta doppia si distribuiscano in $p+1$ coppia di una involuzione quadratica; e queste dànno $p+1$ coppia della γ_2^1.

Si consideri allora la corrispondenza *) $g_2^1\gamma_2^1$; siccome γ_2^1 è trasformata in sè dalla g_2^1, sarà $g_2^1\gamma_2^1 = \gamma_2^1 g_2^1$, e:

$$(g_2^1\gamma_2^1)^{-1} = (\gamma_2^1)^{-1}(g_2^1)^{-1} = \gamma_2^1 g_2^1 = g_2^1\gamma_2^1,$$

talchè quella corrispondenza è involutoria, epperò dà luogo a un'altra involuzione $\overline{\gamma}_2^1$, che contiene quelle $p+1$ coppia, ed è rappresentata sulla retta doppia dalla medesima involuzione quadratica.

Siano π, $\overline{\pi}$ i rispettivi generi di γ_2^1, $\overline{\gamma}_2^1$. I $2p+2-4\pi$ punti doppi di γ_2^1 formano [nota (2) a pag. 6] $p+1-2\pi$ coppie di γ_2^1, e queste saranno perciò coppie di $\overline{\gamma}_2^1$; inversamente una coppia comune a g_2^1, $\overline{\gamma}_2^1$ dà due punti doppi di γ_2^1, poichè $\gamma_2^1 = g_2^1\overline{\gamma}_2^1$. Ne segue per la (6):

$$1 - p + 2\overline{\pi} = p + 1 - 2\pi;$$

donde $\pi + \overline{\pi} = p$; quindi per le (5), se p è pari, sarà $\pi = \overline{\pi} = \frac{p}{2}$; se dispari, sarà uno dei due π, $\overline{\pi}$ eguale a $\frac{p-1}{2}$, l'altro a $\frac{p+1}{2}$ **).

---

*) Con g_2^1, γ_2^1 indichiamo sia le involuzioni, sia le corrispondenze cui esse dàn luogo.

**) Si possono del resto trovare i medesimi risultati, osservando che se i $2p+2$ punti di diramazione formano $p+1$ coppia di una I_2^1, la nostra curva si può, con una conveniente scelta delle a, riferire a ciascuna delle due $y^2 = (x^2 - a_1^2)\dots(x^2 - a_{p+1}^2)$,

7. Consideriamo una curva C di genere due; siano $a_1 a_2 \ldots a_6$ le coordinate dei punti di diramazione $P_1 P_2 \ldots P_6$ sulla retta doppia. Se C possiede una γ^1_ν ellittica, esiste sulla retta doppia una I^1_ν, nella quale certi 4 gruppi G_1, G_2, G_3, G_4 contengono complessivamente i punti P, ciascuno a multiplicità dispari, e altri punti a multiplicità pari.

Sia ν pari. Possiamo escludere il caso che due dei gruppi G non contengano punti P; perchè allora la I^1_ν sarebbe composta *), onde, per l'osservazione in fine del n° 5, lo sarebbe la γ^1_ν. Allora tre dei gruppi G, p. es. G_1, G_2, G_3, conterranno ciascuno due punti P; e G_4 non ne conterrà alcuno. Consideriamo G_1: esso contiene due punti P colle multiplicità $2h+1$, $2k+1$, e certi ρ punti colle multiplicità $2m_1$, $2m_2$, ..., $2m_\rho$; sarà $2h+1+2k+1+\sum 2m_i = \nu$, e $\rho \leqq \frac{\nu-2}{2}$; il segno $=$ valendo solo se $h=k=0$, $m_1 = m_2 = \cdots = m_\rho = 1$. Quindi le multiplicità dei punti contenuti in G_1 vanno computate nel numero totale $2(\nu-1)$ dei punti doppi della I^1_ν per:

$$2h + 2k + \sum(2m_i - 1) = \nu - (\rho + 2) \geqq \frac{\nu-2}{2}$$

unità; e analogamente dicasi per G_2, G_3. Il gruppo G_4 conterrà certi σ punti colle multiplicità $2n_1$, $2n_2$, ..., $2n_\sigma$; sarà $\sum 2n_i = \nu$, $\sigma \leqq \frac{\nu}{2}$; il segno $=$ valendo solo se $n_1 = n_2 = \cdots = n_\sigma = 1$. Cosicchè le multiplicità dei punti di G_4 debbono computarsi nel numero dei punti doppi per:

$$\sum(2n_i - 1) = \nu - \sigma \geqq \frac{\nu}{2}$$

unità; e quelle dei punti di tutti e 4 i gruppi G per:

$$N \geqq 3\frac{\nu-2}{2} + \frac{\nu}{2} = 2\nu - 3$$

unità. Il segno eguale vale solo se i punti contenuti a multiplicità dispari

$y^2 = (x^2 - a_1^2)...(x^2 - a_{p+1}^2)x^2$, che sono in corrispondenza (21) rispettivamente colle due: $\eta^2 = (\xi - a_1^2)\ldots(\xi - a_{p+1}^2)$, $\eta^2 = (\xi - a_1^2)\ldots(\xi - a_{p+1}^2)\xi$. Si noti che la distribuzione dei punti di diramazione in coppie di una I^1_2 può anche avvenire in più modi, e corrispondentemente esistere più coppie di γ^1_2.

*) Se Γ_1, Γ_2 sono due gruppi di ρ punti di una retta, la $I^1_{2\rho}$ determinata da $2\Gamma_1$, $2\Gamma_2$ è, nella I^1_ρ determinata da Γ_1, Γ_2, quella I^1_2 che ha Γ_1, Γ_2 per elementi doppi.

in ciascuno di quei quattro gruppi sono *semplici*, e quelli a multiplicità pari son *doppi*. Ma, se ciò non fosse, risulterebbe, come è facile verificare, $N > 2\nu - 2$. Possiamo quindi dire che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva di genere due possegga una involuzione ellittica di ordine ν pari è che esista sulla retta doppia una I^1_ν, nella quale tre gruppi contengano ciascuno due dei punti di diramazione e $\frac{\nu-2}{2}$ punti doppi, e uno contenga $\frac{\nu}{2}$ punti doppi.

Con analoga discussione si trova che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva di genere due possegga una involuzione ellittica di ordine ν dispari è che sulla retta doppia esista una involuzione I^1_ν, nella quale un gruppo contenga tre punti di diramazione e $\frac{\nu-3}{2}$ punti doppi, e tre gruppi contengano ciascuno uno dei rimanenti punti di diramazione e $\frac{\nu-1}{2}$ punti doppi.

Sotto questa forma appunto HUMBERT, nella memoria citata a principio, enuncia le condizioni perchè la curva $y^2=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_6)$ possegga un integrale di 1ª specie riducibile ad ellittico *).

Pisa, 5 febbraio 1905.

RUGGIERO TORELLI.

*) La sostituzione razionale $\xi = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ trasforma un integrale di 1ª specie annesso alla (2) in uno (di 1ª specie) annesso alla (3). Cfr. a proposito GOURSAT, *Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques*. [Bull. de la Société Math. de France, t. XIII, (1884-85), pp. 143-162].

EIN BRIEF VON CARL WEIERSTRASS

ÜBER

DAS DREIKÖRPERPROBLEM.

Herausgegeben von **Georg Cantor**, in Halle a. d. Saale.

Adunanza del 9 aprile 1905.

Auf Wunsch von Freunden, die ich das Vergnügen hatte auf dem im August 1904 tagenden III. Internationalen Mathematiker-Congress in Heidelberg zu sehen, publicire ich aus meiner in die Jahre 1876 bis 1891 fallenden Correspondenz mit C. WEIERSTRASS den Wortlaut des letzten an mich gerichteten Briefes. Ich erhielt ihn gegen Ende der Zusammenkunft der deutschen Naturforscherversammlung im September 1891 zu Halle a. d. Saale, auf welcher die « Deutsche Mathematiker-Vereinigung » formell constituirt worden ist.

Die Eintheilung des Briefes in 9 Abschnitte habe ich zwecks besserer Uebersicht selbst gemacht.

In den Abschnitten 2, 3, 4, 6, 7 wendet sich WEIERSTRASS mit Energie wider den von mehreren Seiten gegen ihn erhobenen Vorwurf, als hätte er die auf das Dreikörperproblem bezügliche Preisfrage des Königs OSKAR von Schweden und Norwegen so gestellt, dass sie « in der verlangten Form Unmögliches fordere ».

Im Abschnitt 5 erfahren wir, dass WEIERSTRASS einen *directen Beweis für die Lösbarkeit im seinerseits fixirten Sinne* den Herren CH. HERMITE und G. MITTAG-LEFFLER s. Z. mitgetheilt hat. Es würde gewiss von allen Freunden unserer Wissenschaft mit Dank begrüsst werden, wenn Herr MITTAG-LEFFLER diese Arbeit des berühmten Meisters baldigst publiciren möchte.

Denn die genialen Bemühungen des Herrn H. POINCARÉ scheinen bis jetzt das von WEIERSTRASS gesetzte Ziel noch nicht erreicht zu haben,

obgleich die Hülfsmittel der analytischen Functionentheorie sowohl durch Herrn Poincaré selbst, wie auch durch andere hervorragende Geometer seit 13 Jahren bedeutend erweitert worden sind.

Vielleicht werden die Mathematiker, wenn ihnen einmal die von Weierstrass selbst gelieferte Fundamentirung seiner, wie mir scheint, allein richtigen Fragestellung bekannt werden wird, ihre Anstrengungen verdoppeln und in nicht mehr ferner Zukunft das berühmte mathematisch-astronomische Problem, um das es sich hier handelt, bewältigen.

Hier der Brief!

Halle a. d. S., den 17. Januar 1905.

Georg Cantor.

Berlin, den 26. Sept. 1891, Abends.

« Sehr geehrter Herr College,

1. « Das Telegramm, mit dem die in Giebichenstein *) versammelten « Mathematiker mich beehrt und erfreut haben, ist mir zu spät zugekom« men, als dass ich hätte hoffen können, es werde eine telegraphische « Antwort darauf noch rechtzeitig eintreffen, um allen Betheiligten für « die mir bewiesene Aufmerksamkeit meinen herzlichen Dank kund zu « geben. Morgen aber werden die Festtheilnehmer schon nach verschie« denen Richtungen hin auseinander gegangen sein; ich ziehe es daher « vor, bloss an Sie zu schreiben und Sie zu bitten, wenn sich Ihnen « Gelegenheit bietet, noch einige Mitglieder der Vereinigung zu sehen, « denselben zu sagen, dass sie mir durch ihre freundliche Begrüssung « eine wirkliche Freude bereitet haben. Mein Befinden ist den ganzen « Sommer über bis zum gegenwärtigen Augenblick so wenig befriedi« gend gewesen, dass ich auch nicht entfernt daran denken konnte, nach « Halle zu kommen. Es ist mir aber auch nicht möglich geworden, einen

*) Ein Vorort von Halle a. d. S. [G. C.].

« bereits angefangenen Aufsatz, der sich vielleicht zum Vortrag geeignet « hätte, zu Ende zu führen *).

2. « In der letzten Zeit sind mehrere Besprechungen der POINCARÉ'schen Preisschrift erschienen (die eingehendste ist die von NÖTHER), « welche in mehreren wichtigen Puncten prinzipielle Irrthümer enthalten, « welche als solche nachzuweisen und zu berichtigen, vor allem *ich* wohl « die Verpflichtung hätte. Es wird nämlich behauptet, dass die Frage, « auf welche sich POINCARÉ's Schrift bezieht, in der verlangten Form « gar nicht zu beantworten sei; es sei unmöglich, die Coordinaten der « einander nach dem NEWTON'schen Gesetze anziehenden materiellen « Punkte durch beständig gültig bleibende und gleichmässig convergirende « Reihen, in denen die einzelnen Glieder eindeutige Functionen der Zeit « sind, auszudrücken — es seien überhaupt diese Coordinaten keine *analytischen* Functionen der Zeit.

« Da ich die Preisfrage gestellt habe und auch die Fassung von mir « herrührt, so würde, wenn das Vorstehende begründet wäre, mich ein « schwerer Vorwurf treffen; ich würde eine Preisfrage gestellt haben, « ohne sicher zu sein, dass sie nicht an sich Unmögliches fordere.

3. « Ich hatte mich begnügt, um die Möglichkeit einer Lösung des « n-Körperproblems in der verlangten Form nachzuweisen, die bekannten « Mittheilungen KRONECKER's über DIRICHLET's auf die Dynamik sich « beziehenden Arbeiten anzuführen.

4. « KRONECKER läugnet, dass aus den Aeusserungen DIRICHLET's « die von mir gemachten Folgerungen sich ziehen lassen. Darin irrt er « sich, wie er eigentlich selbst zugiebt.

5. « Indessen hatte ich für die Zulässigkeit meiner Annahme über « die Form, in der das in Rede stehende Problem zu lösen sei, auch einen « einfachen *direkten* Beweis ausgearbeitet, den ich auch den anderen Kommissionsmitgliedern (HERMITE und MITTAG-LEFFLER) s. Z. mitgetheilt « habe. Selbstverständlich konnte ich aber nicht behaupten, dass die gesuchten analytischen Ausdrücke sich mit den vorhandenen Hülfsmitteln wirklich *herstellen* liessen, wenn es mir auch gewiss war, dass « dies ausführbar sein werde, *wenn* DIRICHLET wirklich das geleistet hat,

*) Nach dem was im Abschnitte 8 dieses Briefes steht, ist zu vermuthen, dass WEIERSTRASS in diesem Vortrag nichts anderes beabsichtigte, als eine Skizze des im Abschnitt 7 erwähnten, den Herren HERMITE und MITTAG-LEFFLER eingesandten Beweises. [G. C.].

« was KRONECKER angiebt, was aus seiner Mittheilung in den Sitzungs-
« berichten des Jahres 1888 nicht mehr so unbedingt zu entnehmen ist, « als aus der KUMMER'schen Gedächtnissrede *).

6. ... « Das Wesen solcher analytischen Gebilde im Gebiete zweier « Veränderlichen, welche die Eigenthümlichkeit darbieten, dass jedem « Werthe der einen nicht nur unendlich viele Werthe der andern ent- « sprechen sondern dass diese auch — nach Ihrer Ausdrucksweise — eine « überall dichte Punktmenge bilden, scheint in der That manchen Mathe- « matikern gar nicht klar geworden zu sein. Da ist es nun leicht zu « sagen, solche Gebilde sind gar keine analytischen; wobei man aber nicht « bedenkt, dass sie nicht etwa Ausnahmen, sondern vielmehr die Regel « bilden und dass mit ihrer Ignorirung z. B. eine Theorie der durch « algebraische Gleichungen definirten Functionen unmöglich wird.

7. « Der Hauptirrthum aber, den man begeht, besteht darin, dass « man nicht unterscheidet zwischen einem Werthe, den eine Veränder- « liche ihrer Definition gemäss *annehmen* kann und einem solchen, dem « sie nur unendlich nahe kommen kann. Die Erkenntniss, dass eine solche « Unterscheidung nothwendig ist, geht aber nur dem auf, der einen « richtigen Begriff von einer irrationalen Zahlgrösse hat.

8. « Ich hätte mich über die im Vorstehenden berührten Punkte « gern einmal ausführlich ausgesprochen; es reichten aber meine Kräfte « nicht aus, um meine Gedanken mit der für einen Vortrag erforderlichen « Kürze präcis und klar zum Ausdruck zu bringen.

9. « Das Vorstehende soll Ihnen indess beweisen, dass ich ernstlich « daran gedacht habe, wenigstens als Abwesender mich an den Ver- « handlungen des Vereins, dem ich bestes Gedeihen wünsche zu be- « theiligen.

Ihr hochachtungsvoll ergebener
WEIERSTRASS ».

*) (auf DIRICHLET). [G. C.].

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS AUX FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

Par M. **D. Pompeiu**, à Paris.

Adunanza del 12 febbrajo 1905.

Le théorème des accroissements finis a été étendu par M. DARBOUX (Journal de Mathématiques, 1876) aux fonctions d'une variable complexe. Mais, dans cette extension, on ne considère que les points situés sur un segment *rectiligne*: on peut donc dire que l'extension de M. DARBOUX est relative aux fonctions complexes d'une variable réelle. Elle ne suppose, en aucune façon, que la fonction complexe soit analytique; elle ne suppose même pas que cette fonction soit définie en dehors du segment rectiligne sur lequel on raisonne.

Je me propose d'indiquer, dans cette Note, une extension du théorème des accroissements finis, dans laquelle le caractère analytique de la fonction de variable complexe soit nettement impliqué.

Les conditions dans lesquelles je me place sont assez particulières mais mon but est de montrer seulement comment, dans des conditions précises, on peut étendre aux fonctions analytiques le théorème des accroissements finis, sous la forme même qu'il a dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle.

§ 1.

Soit $f(z)$ une fonction analytique holomorphe dans une certaine région R. Je prends un point z_0 intérieur à R et tel qu'en ce point la dérivée $f'(z_0)$ soit différente de zéro.

On peut décrire du point z_0, comme centre, un cercle C jouissant

de la propriété suivante: à deux points différents, pris dans C, correspondent deux valeurs différentes de la fonction $f(z)$. En effet, supposons que cela ne fût pas possible. Alors, dans tout cercle C, de centre z_0, si petit que fût son rayon, on devrait trouver au moins deux points z' et z'' tels que $f(z') = f(z'')$. Mais cela conduit à $f'(z_0) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit maintenant (g) un contour simple fermé, décrit dans l'intérieur de C autour du point z_0, et tel que le contour correspondant (G) décrit par le point $Z = f(z)$, autour du point $Z_0 = f(z_0)$, soit un cercle.

Il est facile de voir qu'entre les domaines g et G existe, au moyen de la fonction $f(z)$, une correspondance *univoque* et *réciproque*. [Comp. Picard, *Traité d'Analyse* (1ère édition), II, page 280]. A tout point z pris à l'intérieur de (g) correspond un point Z intérieur à (G) et un seul; réciproquement, à tout point Z intérieur à (G) correspond un point z dans (g) et un seul.

§ 2.

Ces préliminaires étant établis, soit $F(z)$ une fonction analytique telle que

$$F'(z) = f(z).$$

Dans le domaine (g) je prends deux points a et b et je suppose que le segment rectiligne ab est tout entier intérieur au domaine (g).

Formons le rapport

$$\frac{F(a) - F(b)}{a - b}.$$

Je dis qu'il existe dans (g) un point c tel que

$$f(c) = \frac{F(a) - F(b)}{a - b}. \tag{1}$$

En effet, supposons qu'il n'en fût pas ainsi. Alors le point

$$C = \frac{F(a) - F(b)}{a - b}$$

devrait être en dehors du cercle (G); car, s'il était dans G l'égalité (1) aurait lieu en vertu des hypothèses faites, au § précédent, sur la correspondance entre les domaines (g) et (G).

Je vais montrer maintenant que l'hypothèse d'après laquelle le point C est en dehors du cercle (G) est inadmissible.

Pour cela je considère le point

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

On a

$$\frac{F(a) - F(b)}{a - b} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(a) - F(a_1)}{a - a_1} + \frac{F(a_1) - F(b)}{a_1 - b}\right].$$

Posons

$$C_1' = \frac{F(a) - F(a_1)}{a - a_1}, \qquad C_1'' = \frac{F(a_1) - F(b)}{a_1 - b}.$$

Un des points C_1' et C_1'' est au moins aussi éloigné de Z_0 que le point C. Cela se voit tout-de-suite si l'on représente, sur le plan de la variable complexe Z, les points Z_0, C, C_1' et C_1''.

Supposons, pour fixer les idées, que c'est le point C_1' qui est au moins aussi éloigné de Z_0 que C. Donc, si l'on pose

$$|C - Z_0| = \Delta,$$

on doit avoir

$$|C_1' - Z_0| \geqq \Delta.$$

Cette inégalité étant établie, considérons maintenant le point

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(a + a_1).$$

On a

$$C_1' = \frac{F(a) - F(a_1)}{a - a_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(a) - F(a_2)}{a - a_2} + \frac{F(a_2) - F(a_1)}{a_2 - a_1}\right].$$

Posons

$$C_2' = \frac{F(a) - F(a_2)}{a - a_2}, \qquad C_2'' = \frac{F(a_2) - F(a_1)}{a_2 - a_1}.$$

Un des points C_2' et C_2'' est au moins aussi éloigné de Z_0 que C_1'. Supposons que c'est le point C_2'': alors

$$|C_2'' - Z_0| \geqq \Delta.$$

On prend maintenant le point

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

et l'on répète le raisonnement fait pour les points a_1 et a_2; on obtient ainsi un point que, pour fixer les idées, je désigne par C_3' et tel que

$$|C_3' - Z| \geqq \Delta.$$

On peut continuer ainsi indéfiniment. Mais, on observe que par ce raisonnement on obtient: dans le domaine (g) une suite d'intervalles

$$(a, b), \quad (a, a_1), \quad (a_2, a_1), \ldots$$

et, dans le plan de la variable Z, une suite de points C, C'_1, C''_2, ... tous extérieurs au cercle (G) décrit autour du point Z_0.

Les intervalles (a, b), (a_1, a), ... jouissent des propriétés suivantes:

1° un intervalle quelconque fait partie de l'intervalle qui le précède;

2° sa longueur est égale à la moitié de celle de l'intervalle qui le précède immédiatement.

Dans ces conditions les intervalles (a, b), (a, a_1), ... tendent vers un point limite u, intérieur à (g); les points C, C'_1, ... tendent vers un point $U = f(u)$ et tel que

$$|U - Z_0| \geqq \Delta.$$

Mais cela est absurde puisque le point u étant intérieur à (g) le point $U = f(u)$ doit aussi être intérieur au cercle G.

Donc l'hypothèse faite est inadmissible et le théorème annoncé se trouve démontré.

§ 3.

On a pu voir, par ce qui précède, que la plupart des hypothèses faites ne sont pas indispensables pour la validité de la démonstration. Par exemple, le contour (G) au lieu d'être une circonférence pourrait être une courbe convexe quelconque. Mais pour s'affranchir de toutes les conditions restrictives et non-essentielles il faudrait une étude qui dépasserait le but de cette petite Note.

Remarquons, pour terminer, que la méthode précédente convenablement modifiée peut être employée pour démontrer le théorème des accroissements finis dans le cas des variables réelles.

Mais on peut objecter que cette démonstration est indirecte. En effet, pour les variables réelles on peut faire mieux. J'ai trouvé depuis longtemps une démonstration *directe* et qui présente, sur la démonstration classique d'Ossian Bonnet l'avantage suivant: au lieu de reposer sur le cas particulier qu'est le théorème de Rolle, elle s'applique au cas général et le théorème de Rolle se déduit ensuite comme cas particulier.

Cette démonstration sera publiée prochainement.

§ 4.

Dans une Thèse *Sur la continuité des fonctions imaginaires,* présentée à la Faculté des Sciences de Nancy en 1865, M. H. Laurent a donné

(page 12) une proposition qu'on peut considérer comme la généralisation du théorème de ROLLE.

Voici la proposition de M. LAURENT:

Un point ne peut passer d'un zéro de $f(z)$ à un autre zéro, en se mouvant dans le plan, sans rencontrer en chemin une courbe d'égal module, le long de laquelle $f'(z)$ passe par zéro.

Une courbe d'égal module est définie par l'équation

$$|f(z)| = \text{const.}$$

Paris, 5 février 1905.

D. POMPEIU.

NOTE SUR UNE FORMULE DE M. SCHOUTE.

Par M. **Arthur Berry**, à Cambridge (Engl.).

Adunanza del 26 marzo 1905.

M. Schoute a publié dans ces *Rendiconti* (t. XIX, pp. 156-160) une généralisation polydimensionale de la formule *) pour le moment d'inertie d'un tetraèdre par rapport à un plan. Il emploie un procédé indirect, « la démonstration par le calcul direct étant trop laborieuse ». Je trouve cependant que, si l'on emploie les coordonnées homogènes, le calcul direct est assez simple.

Soient, dans un espace E_n à n dimensions, $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}$ des coordonnées homogènes, telles que $\xi_1 + \cdots + \xi_{n+1} = 1$ et que l'intérieur d'un simplexe S_{n+1} est défini par les inégalités: $\xi_1 > 0, \ldots \xi_{n+1} > 0$. Soient en outre $y_1, \ldots y_{n+1}$ les distances des sommets du simplexe à un espace E_{n-1}.

La distance d'un point à E_{n-1} est alors $y_1\xi_1 + \cdots + y_{n+1}\xi_{n+1}$, et le moment d'inertie est $M \equiv \int (y_1\xi_1 + \cdots + y_{n+1}\xi_{n+1})^2 dv$, où dv est un élément de volume. En conséquence de la symétrie cette expression est égale à

$$a(y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2) + 2b(y_1y_2 + \cdots + y_ry_s + \cdots + y_ny_{n+1}),$$

où

$$a \equiv \int \xi_1^2 dv, \qquad b \equiv \int \xi_1\xi_2 dv.$$

*) M. Schoute attribue cette formule à M. G. Cesàro, mais elle a été bien connue, au moins en Angleterre, depuis longtemps par tous ceux qui s'intéressent à la dynamique des corps. Elle se trouve par exemple au commencement du traité classique de M. Routh, dans la seconde édition (1868) et dans toutes les éditions suivantes.

Or, avec les coordonnées rectangulaires $x_1, \dots x_n$,

$$dv = dx_1 \dots dx_n;$$

et parce que les x sont des fonctions linéaires de n des variables ξ, par exemple de $\xi_1, \dots \xi_n$, on trouve

$$a = C\int\int \dots \xi_1^2 d\xi_1 \dots d\xi_n, \qquad b = C\int\int \dots \xi_1\xi_2 d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

où C dépend seulement des relations entre les deux systèmes de coordonnées ξ et x, et les intégrales doivent être prises pour toutes les valeurs positives des variables $\xi_1, \dots \xi_n$, pourvu que $\xi_1 + \dots + \xi_n < 1$. Pareillement le volume est

$$V \equiv C\int\int \dots d\xi_1 \dots d\xi_n$$

avec les mêmes limites. Donc

$$a \div V = \varphi(2, 0) \div \varphi(0, 0) \qquad b \div V = \varphi(1, 1) \div \varphi(0, 0),$$

où

$$\varphi(r, s) = \int\int \dots \xi_1^r \xi_2^s d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Mais $\varphi(r, s)$ est un exemple particulier d'une intégrale célèbre de Dirichlet, et par conséquent

$$\varphi(r, s) = \Gamma(r+1)\Gamma(s+1) \div \Gamma(r+s+n+1).$$

Donc

$$a \div V = \Gamma(3)\Gamma(n+1) \div \Gamma(n+3) = 2 \div (n+1)(n+2);$$

$$b \div V = \Gamma(n+1) \div \Gamma(n+3) = 1 \div (n+1)(n+2),$$

et enfin

$$M = \frac{2V}{(n+1)(n+2)}(y_1^2 + \dots + y_{n+1}^2 + y_1 y_2 + \dots + y_r y_s + \dots + y_n y_{n+1}),$$

ce qui est la formule de M. Schoute.

Il est évident que la même méthode s'applique aux intégrales plus générales $\int X^r Y^s Z^t \dots dv$, où $X, Y, Z \dots$ sont les distances d'un point du simplexe S_{n+1} à plusieurs espaces $E_{n-1}, E'_{n-1} \dots$.

Cambridge (Engl.), 3 mars 1905.

Arthur Berry.

ESTRATTI DAI VERBALI DELLE ADUNANZE *)

(25 dicembre 1904 — 28 aprile 1905).

ADUNANZA DEL 25 DICEMBRE 1904. [418ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — I signori: Dr. A. BRAMBILLA e Dr. M. MARTONE si dimettono da soci del Circolo. — I signori BOUTROUX, FOUËT e HERMANN ringraziano per le loro nomine a soci del Circolo.

Ammissioni. — Sono eletti soci del Circolo i signori: Dr. LUIGI BRUSOTTI (Pavia) [344], proposto dai soci Berzolari e Guccia; Dr. GUSTAVO SANNIA (Torino) [345], proposto dai Soci D'Ovidio e Torelli; Dr. UMBERTO SBRANA (Pisa) [346], proposto dai soci Torelli e Venturi; Prof. Dr. PIETER HENDRIK SCHOUTE (Groningen) [347], proposto dai soci Albeggiani e Guccia.

Memorie e Comunicazioni.

SBRANA: *I sistemi ciclici nello spazio euclideo ad n dimensioni.*

ADUNANZA DELL'8 GENNAJO 1905. [419ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — I signori: Prof. F. P. RUFFINI, Ing. O. ZANOTTI-BIANCO, e la sig.na Dottoressa G. M. CALDARERA, si dimettono da soci del Circolo. — Il Dr. L. BRUSOTTI e il Dr. G. SANNIA ringraziano per le loro nomine a soci del Circolo.

Ammissioni. — Sono eletti soci del Circolo i signori: Dr. TOMMASO BOGGIO (Torino) [348], proposto dai soci Morera e Segre; Dr. NICCOLÒ GIAMPAGLIA (Catania) [349], proposto dai soci Marletta e Guccia; Prof. Dr. FRIEDRICH SCHUR (Karlsruhe) [350], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Prof. FRANCESCO SIACCI (Napoli) [351], proposto dall'Ufficio di Presidenza.

Memorie e Comunicazioni.

ORLANDO: *Sulla deformazione di un solido isotropo limitato da due piani paralleli, per tensioni superficiali date.* (Nota addizionale).

GULDBERG: *Sur les communs multiples des expressions linéaires aux différences finies.*

ADUNANZA DEL 22 GENNAJO 1905. [420ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — Il Dr. T. BOGGIO e il Prof. Dr. F. SCHUR ringraziano per le loro nomine a soci del Circolo.

Ammissioni. — Sono eletti soci del Circolo i signori: Prof. Dr. PAUL GORDAN (Erlangen) [352], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Prof. Dr. FELIX KLEIN (Göttingen)

*) Pei verbali precedenti, *vedi*: t. I, pp. 1-28, 45-88, 119-156, 379-390; t. II, pp. 77-96, 152, 184-188, t. III, pp. 230-235, 273-278; t. IV, pp. 63-72, 275-286; t. V, pp. 279-288, 319-324; t. VI, pp. 155-164; t. VII, pp. 37-48, 309-312; t. VIII, pp. 166-168; t. IX, pp. 263-272; t. X, pp. 38-40; t. XI, pp. 181-188; t. XII, pp. 307-311; t. XIII, pp. 374-380; t. XIV, pp. 303-312; t. XV, pp. 158-160, 369-370; t. XVI, pp. 294-296; t. XVII, pp. 168-172, 386-389; t. XVIII, pp. 199-204, 221-223, 386-389.

[353], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Prof. Dr. ADOLF KRAZER (Karlsruhe) [354], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; FRANÇOIS-LOUIS MANGE (Paris) [355], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Dr. NIELS NIELSEN (Köbenhavn) [356], proposto dai soci Pincherle e Guccia; Prof. Dr. HIERONYMUS GEORG ZEUTHEN (Köbenhavn) [357], proposto dall'Ufficio di Presidenza.

ADUNANZA DEL 12 FEBBRAJO 1905. [421ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — Il sig. F.-L. MANGE ringrazia per la sua ammissione a socio del Circolo.

Ammissioni.—Sono eletti soci del Circolo i signori: Prof. Dr. V^te ROBERT D'ADHÉMAR (Lille) [358], proposto dai soci de Montessus e Volterra; Prof. JOSÉ G. ALVAREZ UDE (Zaragoza) [359], proposto dai soci de Galdeano e Guccia; Ing. PIETRO CAMINATI (Cagliari) [360], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Dr. MINEO CHINI (Genova) [361], proposto dai soci Ciani e Tedone; Dr. FRANCESCO AURELIO DALL'ACQUA (Venezia) [362], proposto dai soci Cattaneo e Guccia; Dr. FRANCESCO D'AMICO (Acireale) [363], proposto dai soci Marletta e Guccia; Prof. Dr. HENRI FEHR (Genève) [364], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Dr. ALESSANDRO FERRARI (Torino) [365], proposto dai soci Fano e Segre; Dr. GIACINTO GUARESCHI (Torino) [366], proposto dai soci Fano e Segre; Prof. Dr. JULES KÖNIG (Budapest) [367], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Prof. Dr. LEO KOENIGSBERGER (Heidelberg) [368], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Dr. ERNESTO LAURA (Torino) [369], proposto dai soci Morera e Sannia; Dr. MARINO PANNELLI (Roma) [370], proposto dai soci Castelnuovo e Pittarelli; Dr. ANGELO PENSA (Torino) [371], proposto dai soci Fano e Segre; Dr. DÉMÈTRE POMPEIU (Paris) [372], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Prof. Dr. FRIEDRICH PRYM (Würzburg) [373], proposto dai soci Krazer e Guccia; Dr. GIUSEPPE REPETTO (Sassari) [374], proposto dai soci Gigli e Guccia; GIROLAMO SETTIMO, Principe di Fitalia (Palermo) [375], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Prof. Dr. WILHELM WIRTINGER (Wien) [376], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Dr. WILLIAM HENRY YOUNG (Cambridge, Engl.) [377], proposto dai soci D'Ovidio e Segre.

Riammissioni. — Dietro sua domanda, a' sensi dell'Art. 9 dello Statuto, l'Ing. ANTONINO LA MANNA (Palermo) [44] è riammesso socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

NOBILE: *Sullo studio intrinseco delle curve di caccia.*

BOGGIO: *Sulle funzioni di* GREEN *d'ordine m.*

POMPEIU: *Sur l'extension du théorème des accroissements finis aux fonctions analytiques d'une variable complexe.*

ADUNANZA DEL 26 FEBBRAJO 1905. [422ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — I signori ALVAREZ UDE, FERRARI, GUARESCHI, KOENIGSBERGER, PANNELLI, PENSA, SETTIMO DI FITALIA e YOUNG ringraziano per le loro nomine a soci del Circolo.

Ammissioni. — Sono eletti soci del Circolo i signori: Prof. Dr. ANDREW RUS-

SELL FORSYTH (Cambridge, Engl.) [378], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Prof. Dr. GUSTAV KOHN (Wien) [379], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Dottoressa LAURA PISATI (Roma) [380], proposta dai soci Burgatti e Marcolongo; Dr. RUGGIERO TORELLI (Pisa) [381], proposto dai soci Bertini e Guccia.

Memorie e Comunicazioni.

TORELLI (R.): *Sulle involuzioni irrazionali nelle curve iperellittiche.*

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 5 MARZO 1905. [423ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — Il Dr. M. CHINI ringrazia per la sua nomina a socio del Circolo.

Ammissioni. — Sono eletti soci del Circolo i signori: Prof. Dr. WILLIAM FOGG OSGOOD (Cambridge, U. S. A.) [382], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Ing. MICHELE PINTACUDA (Palermo) [383], proposto dai soci Albeggiani e Guccia.

Memorie e Comunicazioni.

PANNELLI: *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica.*

ENRIQUES: *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero.*

Bilanci. — Esposizione ed approvazione del *Conto Consuntivo dell'Esercizio 1904*, reso dal Tesoriere, e del *Bilancio di previsione per l'Esercizio 1905*.—Su proposta dell'Ufficio di Presidenza si delibera un voto di ringraziamento al socio Prof. GUCCIA pel sussidio di L. 1000 da questi elargito onde provvedere alle maggiori, eccezionali spese sostenute dalla Società nell'Esercizio 1904.

Rendiconti. — Su proposta dell'Ufficio di Presidenza si delibera di limitare fino al 31 dicembre 1905 la facilitazione consentita ai Soci con la deliberazione del 12 gennajo 1890 (t. IV, pp. 63-64) «di acquistare per una sola volta al prezzo ridotto di lire *sei* i volumi dei Rendiconti pubblicati prima della loro ammissione», salvo a determinare in altra seduta il nuovo prezzo pei Soci.

ADUNANZA DEL 12 MARZO 1905. [424ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Ammissioni. — È eletto socio del Circolo il signor: Dr. JOHN EIESLAND (Annapolis, U. S. A) [384], proposto dai soci Halsted e Guccia.

Riammissioni.—Dietro sua domanda, ai sensi dell'Art. 9 dello Statuto, il Dr. GIOVANNI VAILATI (Firenze) [203] è riammesso socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

SANNIA: *Trasformazione di* COMBESCURE *ed altre analoghe per le curve storte.*

ADUNANZA DEL 26 MARZO 1905. [425ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — Il Dr. G. REPETTO ringrazia per la sua nomina a socio Circolo.

Ammissioni. — Sono eletti soci del Circolo i signori: Dr. GAETANO PIETRA (Padova) [385], proposto dai soci Levi-Civita e Dall'Acqua; Prof. Dr. GEORG CANTOR

(Halle a. d. S.) [386], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Dr. ARTHUR BERRY (Cambridge, Engl.) [387], proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Prof. Dr. JAKOB LÜROTH (Freiburg i. Br.) [388], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Prof. Dr. JAKOB ROSANES (Breslau) [389], proposto dall'Ufficio di Presidenza; Prof. Dr. ARNOLD EMCH (Boulder, U. S. A.) [390], proposto dai soci Newson e Guccia; Prof. Dr. MELLEN WOODMAN HASKELL (Berkeley, U. S. A.) [391], proposto dai soci Newson e Guccia; Prof. BENJAMIN FRANKLIN FINKEL (Springfield, U. S. A.) [392], proposto dai soci Halsted e Guccia.

Riammissioni. — Dietro sua domanda, a' sensi dell'Art. 9 dello Statuto, l'Ing. Prof. MICHELE CAPITÒ (Palermo) [9] è riammesso socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

ADHÉMAR (D'): *Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique.*

BERRY: *Note sur une formule de* M. SCHOUTE.

ADUNANZA DEL 9 APRILE 1905. [426ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Corrispondenza. — Il Dr. G. SANNIA ringrazia per la sua nomina a socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

CANTOR (G.): *Ein Brief von* CARL WEIERSTRASS *über das Dreikörperproblem.*

SEVERI: *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare.*

VITALI: *Sulle funzioni ad integrale nullo.*

GEBBIA: *Sulla integrabilità delle condizioni di rotolamento di un corpo solido sopra un altro, e su qualche questione geometrica che vi è connessa.*

ADUNANZA DEL 23 APRILE 1905. [427ª].

(Presidenza del Presidente **Albeggiani**).

Ammissioni.—È eletto socio del Circolo il signor ALBERT GAUTHIER-VILLARS (Paris) [393], proposto dai soci Albeggiani e Guccia.

Memorie e Comunicazioni.

DE FRANCHIS: *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve.*

I Segretari:

G. di Simone, E. P. Guerra.

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo XIX (1905).

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XIX. — ANNO 1905.

PARTE SECONDA: BIBLIOTECA MATEMATICA.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

30, via Ruggiero Settimo, 30.

1905

REPERTORIO BIBLIOGRAFICO
DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA.

(*Continuazione*, vedi t. XV, pp. 1-29).

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BOLOGNA.
(1731-1889) (*).

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI ED ABBREVIATURE.

C. I. B. = De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, Bononiæ (**). TOMI I-VII (1731-1791); in-4°.

M. I. N. It. = Memorie dell'Istituto Nazionale Italiano. Classe di Fisica e Matematica, Bologna. VOLUMI I-IV (1806-1810) (***).

Op. S. B. = Opuscoli scientifici. Memorie lette nella sezione bolognese del Reale Istituto Italiano, Bologna. VOLUMI I-IV (1817-1823).—Nuova collezione d'Opuscoli scientifici, Bologna (1824).

R I. B. = Rendiconti delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dello Istituto di Bologna (****).

N. C. I. B. = Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Instituti Bononiensis, Bononiæ. TOMI I-X (1834-1849); in-4°.

M. I. B. = Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

SERIE I, TOMI I-XII (1850-1861); in-4°.
SERIE II, TOMI I-X (1862-1870); in-4°.
SERIE III, TOMI I-X (1871-1879); in-4°.
SERIE IV, TOMI I-X (1880-1889); in-4°.

s. = Serie; t. = Tomo; v. = Volume; a. = Anno; p. = Parte; pp. = Pagine.

(*) Il lavoro di spoglio e di classificazione delle pubblicazioni della R. Accademia delle Scienze di Bologna è dovuto al Prof. R. Marcolongo ed al Dr. N. Bentivegna.

(**) Tutti i volumi contengono una prima parte « Commentarii », che è un riassunto dei lavori fatti dagli Accademici, ed una seconda parte « Academicorum quorundam Opuscola varia ». Salvo rarissime eccezioni tutte le memorie catalogate trovansi in questi « Opuscola ». — Il tomo I è del 1731 ed è stato ristampato nel 1748. — Il tomo II è diviso in 3 volumi, ed il tomo V in 2 volumi.

(***) Per i lavori contenuti nelle « Memorie dell'Istituto Nazionale Italiano » vedi R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (numeri 1-380).

(****) Dal 1829 al 1837 i « Rendiconti » sono iscritti nel « Bullettino delle Scienze Mediche di Bologna », che comprende 12 volumi della 1ª serie e 4 della 2ª; dal 1838 al 1854 nei « Nuovi Annali delle Scienze Naturali », distribuiti nelle tre seguenti serie: 1ª, 10 volumi (1838-1843); 2ª, (1844-1848); 3ª, 10 volumi (1849-1854). Dal 1854 in poi si pubblicano separatamente.

4053. **A 1 a.**

CASALI (Gregorius Philippus Maria). De seriebus geometricis. [*C. I. B.*, t. VI, pp. 251-264 (1783)].

4054. **A 1 c.**

CASINELLI (Aloysius). Nova methodus evehendi ad potentiam quamcumque quantitates polynomias. [*N. C. I. B.*, t. IV, pp. 453-469 (1840)].

4055. **A 1 c β.**

MANFREDI (Gabriel). De inveniendis datarum formularum irrationalium reciprocis. [*C. I. B.*, t. III, pp. 432-453 (1755)].

4056. **A 2 b.**

PIANI (Domenico). Cenni sulle equazioni a due incognite. [*R. I. B.*, a. 1854-55, pag. 33].

4057. **A 3 b.**

BOSCHI (Pietro). Sulle funzioni simmetriche delle radici di una equazione. (Memoria letta li 25 gennaio 1877). [*M. I. B.*, s. III, t. VII, pp. 569-588 (1876)].

4058. **A 3 b.**

PESCI (Giuseppe). Una formula relativa alle funzioni simmetriche. [*R. I. B.*, a. 1886-87, pag. 49].

A 3 b. (*Vedi* n° 4074).

4059. **A 3 g.**

PIANI (Dominicus). De limitibus æquationum. [*N. C. I. B*, t. III, pp. 237-250 (1839)].

4060. **A 3 g.**

PIANI (Domenico). Del metodo newtoniano per la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche. (Memoria letta li 26 aprile 1866). [*R. I. B.*, a. 1865-66, pp. 77-82; *M. I. B.*, t. VI, pp. 69-89 (1866)].

A 3 g. (*Vedi* n[i] 4122, 4123).

4061. **A 3 h.**

LAPI (G. B.). Trasformazione, principalmente nella teoria delle equazioni algebraiche. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. IX, pag. 366 (1834)].

4062. **A 3 i.**

CASINELLI (Aloysius) Disquisitiones analiticæ super æquationibus trinomialibus formæ $x^n \pm Ax \pm B = 0$. [*N. C. I. B.*, t. VII, pp. 331-343 (1844)].

4063. **A 3 i.**

CASINELLI (Aloysius). De formis radicum æquationum algebraicarum. [*N. C. I. B.*, t. VIII, pp. 317-331 (1846)].

4064. **A 3 j.**
CASINELLI (Aloysius). De æquationum algebraicarum resolutione. [*N. C. I. B.*, t. V, pp. 65-88 (1842)].

4065. **A 3 j.**
CASINELLI (Aloysius). De innumeris æquationibus, quæ peculiari artificio resolvi possunt. [*N. C. I. B.*, t. V, pp. 433-483 (1842)].

4066. **A 3 j.**
CASINELLI (Aloysius). Disquisitiones variæ super resolutionem nonnullarum æquationum algebraicarum præsertim quinti gradus. [*N. C. I. B.*, t. VI, pp. 391-417 (1844)].

4067. **A 3 j.**
CASINELLI (Aloysius). De æquationibus algebraicis quorum radices constant quattuor elementis. [*N. C. I. B.*, t. VII, pp. 510-528 (1844)].

4068. **A 3 k.**
MAGISTRINI (Joannes Baptista). De æquationibus algebraicis tum determinatis, tum indeterminatis geometrice construendis. [*N. C. I. B.*, t. I, pp. 194-219 (1834)].

4069. **A 3 k.**
PIANI (Domenico). Sopra alcune questioni di Matematica. [*R. I. B.*, a. 1864-65, pag. 61].

A 3 k. (*Vedi* n° 4142).

4070. **B 1 a.**
PINCHERLE (Salvatore). Una formola sui determinanti. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pp. 105-106].

4071. **B 4 h.**
D'ARCAIS (Francesco). Nota sopra un teorema della teoria delle forme binarie. (Memoria letta li 7 marzo 1878). [*M. I. B.*, s. III, t. IX, pp. 173-180 (1878)].

4072. **B 7 a, K 6 c.**
BELTRAMI (Eugenio). Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. (Memoria letta li 10 febbraio 1870). [*R. I. B.*, a. 1869-70, pp. 61-62; *M. I. B.*, s. II, t. IX, pp. 607-657 (1869)].

4073. **B 12 a.**
SAPORETTI (Antonio). Ritrovamento del Principio della sostituzione fondamentale nei radicali imaginari. [*R. I. B.*, a. 1877-78, pp. 126-127].

4074. **B 12 a, A 3 b.**
SAPORETTI (Antonio). Analisi nuova per mostrare giusto l'usato metodo pratico

degl'immaginari e teoria, più generale dell'usata, sulle relazioni fra i coefficienti delle funzioni algebrico-intere ad una variabile ed i fattori lineari, siano funzionali, siano propri delle equazioni. [*R. I. B.*, a. 1887-88, pag. 18; *M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 555-571 (1887)].

4075. **B 12 h, H 11.**

PINCHERLE (Salvatore). Studii sopra alcune operazioni funzionali. [*R. I. B.*, a. 1885-86, pag. 58; *M. I. B.*, s. IV, t. VII, pp. 393-442 (1886)].

4076. **C 1 a, V 1 a.**

MAGISTRINI (Giambattista). Confronto del calcolo delle funzioni di La-Grange col calcolo infinitesimale e superiorità del primo. (Memoria postuma letta li 19 gennaio 1832). [*M. I. B.*, t. I, pp. 93-121 (1850)].

4077. **C 1 a, V 1 a.**

MAGISTRINI (Giambattista). Brevi cenni sopra un punto importante d'analisi bisognoso tuttora di schiarimento. (Memoria postuma letta li 16 aprile 1846). [*M. I. B.*, t. I, pp. 297-308 (1850)].

4078. **C 1 e α.**

RICCATI (Vincentius). Animadversiones in fractionem, cuius numerator et denominator per certam determinationem nihilo æquales fiunt. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 173-193 (1747)].

4079. **C 1 f.**

CALLEGARI (Petrus). De nova solutione problematis Fermatii nec non aliorum, quæ ex iisdem formulis deducuntur. [*N. C. I. B.*, t. IV, pp. 309-327 (1840)].

4080. **C 1 f, J 5.**

PINCHERLE (Salvatore). Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni. [*R. I. B.*, a. 1883-84, pag. 92; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 739-750 (1883)].

C 1 f. (*Vedi* n° 4090).

4081. **C 2 a.**

MANFREDI (Gabriel). De formulis quibusdam integrandis. [*C. I. B.*, t. I, pp. 573-588 (1731)].

4082. **C 2 a, O 2 a.**

RICCATI (Vincentius). De quadratura curvarum tradita per summas generales serierum. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 432-445 (1767)].

4083. **C 2 a, D 2 a.**

CASINELLI (Luigi). Sull'integrazione per serie di alcune funzioni differenziali di nota integrazione finita. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. IX, pag. 367 (1834)].

C 2 a. (*Vedi* n° 4142).

4084. **C 2 e.**

RICCATI (Vincentius). Epistolæ tres, quibus utilitas calculi sinuum et cosinuum in infinitesimorum analysi demonstratur. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 198-215 (1767)].

4085. **C 2 e.**

RICCATI (Vincentius). De quarumdam formularum exponentialium integratione [*C. I. B.*, t. VII, pp. 241-288 (1791)].

4086. **C 2 e.**

CASINELLI (Aloysius). Observationes analyticæ in formulam $\int \frac{dx}{\log x}$. [*N. C. I. B.*, t. III, pp. 97-114 (1839)].

4087. **C 2 f.**

SALADINI (Hieronymus). Methodus Bernoulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis sæpe redditur, immaginariis quantitatibus liberatur, atque ejusdem reductionis innumeræ aliæ viæ indigitantur. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 120-138 (1767)].

4088. **C 2 i.**

ARZELÀ (Cesare). Sugli integrali di funzioni che, oltre alla variabile d'integrazione, contengono altre variabili. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 16].

4089. **C 2 j, D 2 a γ, T 7 c.**

GHERARDI (Silvestro). Brevi considerazioni sui vantaggi del metodo di integrazione per serie infinite anche nei casi di nota integrazione finita e sopra qualche altro argomento. (Memoria letta li 20 dicembre 1849). [*M. I. B.*, t. II, pp. 417-438 (1850)].

4090. **C 3 a, C 1 f.**

RUBBINI (Giuseppe). Proprietà di alcuni determinanti minori. Applicazione alla teorica dei massimi e dei minimi. [*R. I. B.*, a. 1856-57, pag. 65].

4091. **C 4 a.**

BELTRAMI (Eugenio). Sulla teoria generale dei parametri differenziali. (Memoria letta li 25 febbraio 1869). [*R. I. B.*, a. 1868-69, pp. 55-56; *M. I. B.*, s. II, t. VIII, pp. 549-590 (1868)].

4092. **D 1 a.**

INGRAMI (Giuseppe). Sulle funzioni implicite di una funzione di variabile reale. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 108].

4093. **D 1 b ε, D 2 e α.**

PINCHERLE (Salvatore). Su alcune formole approssimate per la rappresentazione

di funzioni. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 91; *M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 76-88 (1889)].

4094. **D 2 a.**
ARZELÀ (Cesare). Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue. [*R. I. B.*, a. 1883-84, pag. 79].

D 2 a. (*Vedi* n° 4083).

D 2 a γ. (*Vedi* n° 4089).

4095. **D 2 b.**
CASINELLI (Aloysius). Disquisitio analitica in functionem $[\log(1+x)]^m$. [*N. C. I. B.*, t. IV, pp. 147-162 (1840)].

4096. **D 2 b** β.
SAPORETTI (Antonio). Metodo analitico dello sviluppo di un arco circolare in funzione trigonometrica di un altro arco, cognito il quoto costante delle loro tangenti trigonometriche. [*R. I. B.*, a. 1886-87, pag. 43; *M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 57-62 (1887)].

4097. **D 2 c.**
PIANI (Domenico). Sulle funzioni fattoriali. (Memoria letta li 9 dicembre 1847). [*M. I. B.*, t. I, pp. 511-519 (1850)].

4098. **D 2 c.**
ARZELÀ (Cesare). Sui prodotti infiniti. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pag. 60; *M. I. B.*, s. IV, t. IV, pp. 419-439 (1882)].

4099. **D 2 c.**
PINCHERLE (Salvatore). Sui prodotti infiniti. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pag. 159].

4100. **D 2 c.**
ARZELÀ (Cesare). Sui prodotti infiniti. [*R. I. B.*, a. 1885-86, pp. 92-99].

4101. **D 2 d.**
PINCHERLE (Salvatore). Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 513-538 (1889)].

D 2 e α. (*Vedi* n° 4093).

4102. **D 4.**
PINCHERLE (Salvatore). Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pp. 48-49; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 151-180 (1881)].

4103. **D 4 c.**
PINCHERLE (Salvatore). Sopra un'applicazione delle funzioni sferiche al teorema di M i t t a g - L e f f l e r. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pag. 100].

4104. **D 6 b.**

CASINELLI (Luigi). Logaritmi Iperbolici. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. X, pag. 290 (1834)].

4105. **G 1 a, G 1 b, G 1 e.**

CREMONA (Luigi). Sugli integrali a differenziale algebrico. (Memoria letta li 8 aprile 1869). [*R. I. B.*, a. 1868-69, pp. 68-73; *M. I. B.*, s. II, t. X, pp. 3-33 (1870)].

4106. **H 2 c.**

RICCATI (Vincentius). Animadversiones in formulam differentialem, in qua indeterminatæ ad unicam tantum dimensionem ascendunt. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 194-214 (1747)].

4107. **H 2 c.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). De separandis indeterminatis. [*C. I. B.*, t. III, pp. 261-279 (1755)].

H 2 c. (*Vedi* n[i] 4142, 4183).

4108. **H 4.**

PEZZI (Franciscus). Specimen theoriæ æquationum hujus formæ

$$Ay + A_1 \frac{dy}{dx} + \dots + A_n \frac{d^n y}{dx^n} = P,$$

sumpto elemento dx constante, et significantibus P, A_1, ... A_n functiones quascumque ipsius x et quantitatum constantium. [*C. I. B.*, t. VII, pp. 347-362 (1791)].

4109. **H 5 a.**

FRISIUS (Paulus). De æquatione quadam differentiali. [*C. I. B.*, t. VI, pp 71-74 (1783)].

H 5 a. (*Vedi* n° 4190).

4110. **H 5 h α.**

PINCHERLE (Salvatore) Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni. [*M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 125-143 (1887)].

4111. **H 7.**

FAIS (Antonio). Nota intorno all'eliminazione delle funzioni arbitrarie. (Memoria letta li 14 novembre 1878). [*M. I. B.*, s. III, t. IX, pp. 649-656 (1878)].

4112. **H 9 b.**

FAIS (Antonio). Intorno all'integrazione delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, lineari, a quattro o più variabili indipen
pp. 427-443 (1881)].

4113. **H 9 f.**

DE CONDORCET (Nicolaus). De integratione æquationis

$$a + bu + c\frac{du}{dx} + g\frac{du}{dy} + h\frac{du}{dz} + i\frac{d^2u}{dx^2} + k\frac{d^2u}{dxdy} + l\frac{d^2u}{dxdz} + m\frac{d^2u}{dy^2}$$
$$+ n\frac{d^2u}{dydz} + s\frac{d^2u}{dz^2} + \text{etc.} = 0.$$

[*C. I. B.*, t. VI, pp. 373-381 (1783)].

H 11. (*Vedi* n° 4075).

4114. **H 11 c.**

PINCHERLE (Salvatore). Sulla risoluzione dell'equazione funzionale:

$$\sum h_\nu\, \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x)$$

a coefficienti costanti. [*R. I. B.*, a. 1887-88, pag. 53 e pag. 114; *M. I. B.*, s. IV, t. IX, pp. 45-71, 181-204 (1888)].

H 12 b. (*Vedi* n° 4190).

4115. **H 12 d.**

RICCATI (Vincentius). De termino generali serierum recurrentium, cum appendice. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. 87-108 (1767)].

4116. **H 12 d.**

RICCATI (Vincentius). Additamentum ad opusculum de termino generali serierum recurrentium cum appendice, quod editum est in hujus tomi parte prima. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 415-420 (1767)].

4117. **H 12 f.**

VAN GINDER ACHTER (Giovanni). Equazioni a indici. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. XI, pag. 168 (1835)].

I 1. (*Vedi* n° 4128).

4118. **I 2.**

CASTELVETRI (Johannes Antonius Andrea). De quadam generali numerorum proprietate. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 242-259 (1757)].

4119. **I 2 b.**

CASTELVETRI (Johannes Antonius Andrea). De proprietate numerorum divisibilium per 11, 111, 1111, etc. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 108-119 (1767)].

4120. **I 10.**

BOSCHI (Pietro). Ricerche sopra una quistione di partizione di numeri. (Memoria letta li 13 marzo 1880). [*M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 455-571 (1880)].

I 19 c. (*Vedi* n[i] 4213, 4214).

4121. **I 25 b.**

CASINELLI (Aloysius). Disquisitiones analiticæ de numeris triangularibus. [*N. C. I. B.*, t. I, pp. 415-434 (1834); *R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. X, pag. 217 (1834)].

4122. **I 25 b, A 3 g.**

CALLEGARI (Petrus). De usu subtractionis, et divisionis extendendo ad nonnullas præsertim propositiones demonstrandas. [*N. C. I. B.*, t. VI, pp. 513-570 (1844)].

4123. **I 25 b, A 3 g.**

CALLEGARI (Petrus). Aliæ nonnullæ applicationes calculi symbolici, quo subtractionis et divisionis usum in doctrina numerorum, et æquationum juvari, et extendi posse demonstratur. [*N. C. I. B.*, t. VII, pp. 529-561 (1844)].

4124. **J 1 b α.**

BOSCHI (Pietro). Sopra il numero delle combinazioni di classe data aventi una somma data. [*R I. B.*, a. 1883-84, pag. 73; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 805-818 (1883)].

4125. **J 2 e.**

CATUREGLI (Pietro). Dei minimi quadrati. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. X, pag. 222 (1834)].

4126. **J 4.**

PINCHERLE (Salvatore). Sui gruppi lineari di funzioni di una variabile. [*R. I B.*, a. 1884-85, pag. 14; *M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 101-118 (1884)].

4127. **J 4.**

PINCHERLE (Salvatore). Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni. [*R. I. B.*, a. 1884-85, pp. 53-54; *M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 205-214 (1884)].

J 5. (*Vedi* n° 4080).

K 2 c. (*Vedi* ni 4156, 4168).

4128. **K 3 b, I 1.**

MARTINI (Matteo). Un teorema geometrico sul triangolo equilatero ed il circolo iscritto, e due teoremi sulla teoria dei numeri. [*Op. S. B.*, a. 1824, pp. 251-261].

4129. **K 3 b.**

CASINELLI (Luigi). Rette perpendicolari ai lati di un triangolo equilatero condotte da un punto qualunque della circonferenza iscritta. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. IX, pag. 368 (1834)].

4130. **K 5.**

CALLEGARI (Pietro). Ricerche spettanti alla correlazione delle figure di geometria. (Memoria letta li 12 gennaio 1843). [*M. I. B.*, t. IV, pp. 179-197 (1853)].

4131. **K 6.**

LAPI (Giovanni Battista). Permutazione delle coordinate delle linee curve. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche. v. X, pag. 293 (1834)].

4132. **K 6 a, L^1 1 a, L^2 1 a.**

CHELINI (Domenico). Sulla teoria de' sistemi semplici di coordinate e sulla discussione dell'equazione generale di secondo grado in coordinate triangolari e tetraedriche. (Memoria letta li 16 aprile 1863). [*M. I. B.*, s. II, t. III, pp. 3-81 (1863)].

K 6 c. (*Vedi* n° 4072).

4133. **K 9 a.**

CASINELLI (Aloysius). Demonstratio quorumdam theorematum ad polygona circulo inscripta, vel circumscripta pertinentium. [*N. C. I. B.*, t. II, pp. 241-272 (1836)].

4134. **K 9 a α.**

CASALI (Gregorius Philippus Maria). De Polygonoidum area [*C. I. B.*, t. VII, pp. 338-346 (1791)].

4135. **K 10 e.**

CASINELLI (Luigi). Problemi intorno le secanti e le tangenti nel circolo. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. XII, pag. 360 (1835)].

4136. **K 11 e.**

FAGNOLI (Giuseppe). Costruzione geometrica del sistema d'archi circolari detto comunemente semiovale. o curva a tre centri, desunta da alcune proprietà generali della curva medesima. (Memoria letta li 18 febbraio 1847). [*M. I. B.*, t. I, pp. 609-636 (1850)].

4137. **K 11 e.**

PIANI (Domenico). De' circoli tangenti ad una terna di rette variabili con data legge. [*R. I. B.*, a. 1856-57, pag. 58].

4138. **K 13 c, R 3 c.**

CHELINI (Domenico). Dell'uso del principio geometrico della risultante nella teoria de' tetraedri. (Memoria letta li 9 maggio 1867). [*R. I. B.*, a. 1866-67, pp. 84-86; *M. I. B.*, s. II, t. VII, pp. 79-99 (1867)].

4139. **K 13 c, L^1 16 a, L^1 17 d, L^2 4 a.**

CHELINI (Domenico). Sopra alcuni punti notabili nella teoria elementare de' tetraedri e delle coniche. (Memoria letta li 30 aprile 1874). [*R. I. B.*, a. 1873-74, pp. 77-78; *M. I. B.*, s. III, t. V, pp. 223-253 (1874)].

4140. **K 14 c.**

CASALI (Gregorius). De figuris quibusdam solidis in sphæra inscribendis. [*C. I. B.*, t. III, pp. 194-199 (1755)].

4141. **K 15 a, K 15 b.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). De corporibus quibusdam sphæræ circumscriptis. [*C. I. B.*, t. III, pp. 362-373 (1755)].

K 15 b. (*Vedi* n° 4141).

4142. **K 20 a, H 2 c, C 2 a, A 3 k.**

MANFREDI (Gabriel). De eliminandis ab æquatione arcubus circularibus, et alia. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 520-555 (1747)].

4143. **K 23 a.**

ZANOTTI (Eustachius). De perspectiva in theorema unum redacta. [*C. I. B.*, t. III, pp. 169-176 (1755)].

4144. **K 23 a.**

FAGNOLI (Joseph). Specimen criticæ analysis de Prospectiva Theoretica. [*N. C. I. B.*, t. IX, pp. 553-571 (1849)].

4145. **K 23 a, L^1 1 e.**

CHELINI (Domenico). Delle sezioni del cono e della prospettiva nell'insegnamento della Geometria analitica. (Memoria letta li 12 maggio 1864). [*R. I. B.*, a. 1863-64, pp. 153-154; *M. I. B.*, s. II, t. III, pp. 441-464 (1863)].

L^1 1 a. (*Vedi* n° 4132).

4146. **L^1 1 b.**

LORGNA (Antonius Marius). De coni sectionum organica descriptione. [*C. I. B.*, t. VII, pp. 23-26 (1791)].

4147. **L^1 1 c, M^1 4 a, M^1 5, M^2 4 d, M^3 4 a, M^3 5, M^3 6 a.**

BELTRAMI (Eugenio). Ricerche di Geometria analitica. (Memoria letta li 17 gennaio 1879). [*R. I. B.*, a. 1878-79, pp. 40-42; *M. I. B.*, s, III, t. X, pp. 233-312 (1879)].

L^1 1 e. (*Vedi* n° 4145).

L^1 3 b. (*Vedi* n° 4258).

4148. **L^1 5 e, L^1 5 b.**

BEDETTI (Julius). De maximis et minimis distantiis a dato puncto ad lineam datam; cum applicatione ad Sectiones Conicas, hoc est ad materiam libri V de Conicis Apollonii Pergæi. [*N. C. I. B.*, t. IX, pp. 455-552 (1849)].

4149. **L^1 6 a.**

BOSCHI (Pietro). Determinazione dei centri di curvatura delle coniche. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pag. 86; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 579-588 (1881)].

4150. **L^1 8 a.**

RETALI (Virginio). Sulle coniche coniugate degeneri. [*R. I. B.*, *a*

4151. **L¹ 8 b.**

RETALI (Virginio). Ricerche sopra l'immaginario in geometria. [*R. I. B.*, a. 1887-88, pag. 89; *M. I. B.*, s. IV, t. IX, pp. 259-277 (1888)].

L¹ 9. (*Vedi* n° 4182).

4152. **L¹ 9 a.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). De hyperbolicis quibusdam spatiis. [*C. I. B.*, t. II, p. II, pp. 186-200 (1746)].

4153. **L¹ 9 d.**

MAGISTRINI (Giovanni). Compimento di una regola di Giovanni Bernoulli per la rettificazione dell'ellisse. [*Op. S. B.*, v. I, pp. 244-247 (1817)].

4154. **L¹ 15 f.**

ODDI (Giuseppe). Sopra alcune curve dipendenti dalle sezioni coniche. [*Op. S. B.*, v. II, pp. 293-305 (1818)].

4155. **L¹ 15 f.**

MASETTI (Giambattista). Ricerca ed analisi di quattro curve algebraiche dipendenti dalla parabola e dal circolo. [*Op. S. B.*, v. III, pp. 159-170 (1819)].

4156. **L¹ 16 a, P 4 b, L¹ 18 c, K 2 c.**

BELTRAMI (Eugenio). Intorno alle coniche dei nove punti e ad alcune quistioni che ne dipendono. (Memoria letta li 12 marzo 1863). [*M. I. B.*, s. II, t. II, pp. 361-395 (1862)].

L¹ 16 a. (*Vedi* n' 4139, 4168).

4157. **L¹ 17 b.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Di alcuni teoremi riferibili alla polarità reciproca delle coniche. (Memoria letta li 13 gennaio 1876). [*R. I. B.*, a. 1875-76, pp. 50-51; *M. I. B.*, s. III, t. VI, pp. 383-394 (1875)].

4158. **L¹ 17 d.**

CHELINI (Domenico). Intorno ai poligoni inscritti e circoscritti alle coniche. (Memoria letta li 10 dicembre 1874). [*M. I B.*, s. III, t. V, pp. 353-357 (1874)].

L¹ 17 d. (*Vedi* n° 4139).

L¹ 18 c. (*Vedi* n[i] 4156, 4168).

4159. **L¹ 21 b β.**

PORCHIESI (Augusto). Sui sistemi di coniche che passano per due punti fissi. [*M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 681-726 (1881).

4160. **L¹ 21 b β.**

RETALI (Virginio). Sopra una serie particolare di coniche di indice 2. [*M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 373-386 (1883)].

L^2 (*Vedi* n° 4173).

L^2 1 a. (*Vedi* n° 4132).

L^2 4 a. (*Vedi* n° 4139).

4161. **L^2 11 c, L^2 11 d.**

CREMONA (Luigi). Sulle linee di curvatura delle superficie di 2° grado. (Memoria letta li 12 maggio 1870). [*R. I. B.*, a. 1869-70, pp. 86-88; *M. I. B.*, s. III, t. I, pp. 48-67 (1871)].

4162. **M^1.**

CREMONA (Luigi). Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. (Memoria letta li 19 dicembre 1861). [*M. I. B.*, t. XII, pp. 305-436 (1861)].

4163. **M^1 1.**

CREMONA (Luigi). Sulla teoria generale delle curve piane. [*R. I. B.*, a. 1861-62, pp. 30-31)].

4164. **M^1 1 d, M^1 1 e.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche. (Memoria letta li 4 marzo 1880). [*R. I. B.*, a. 1879-80, pp. 87-90; *M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 367-415 (1880)].

4165. **M^1 3 j, O 2 q.**

PIANI (Domenico). Sopra alcune linee a data relazione di distanza con linee e punti dati. (Memoria letta li 18 gennaio 1849). [*M. I. B.*, t. IV, pp. 261-308 (1853)].

4166. **M^1 3 j, O 2 b.**

PIANI (Domenico). Problemi geometrici relativi agli angoli fatti da' raggi vettori sia colle tangenti sia fra loro ed applicazione all'ottica. (Memoria letta li 7 febbraio 1850). [*M. I. B.*, t. IV, pp. 309-328 (1853)].

4167. **M^1 3 k.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Delle curve piane algebriche che hanno potenza in rispetto ad ogni punto del loro piano ovvero in rispetto ad alcuni dei loro propri punti. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 337-350 (1889)].

M^1 4 a. (*Vedi* n° 4147).

M^1 5. (*Vedi* n° 4147).

4168. **M^1 5 b, L^1 16 a, L^1 18 c, K 2 c, P 4 b.**

BELTRAMI (Eugenio). Su alcuni teoremi di Feuerbach [illegible] ercitazione analitica. (Memoria letta li 25 febbraio [illegible]
pp. 115-116; *M. I. B.*, s. III, t. V, pp. 543-[illegible]

4169. **M¹ 5 c.**

CASALI (Gregorius). De conicarum sectionum focis. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 298-310, 338-348 (1757)].

4170. **M¹ 8 e, M² 9 c.**

TORTOLINI (Barnabas). De formatione quarumdam æquationum algebraicarum quibus satisfaciunt functiones algebraicæ datæ commentatio. [*N. C. I. B.*, t. IX, pp. 213-299 (1849)].

4171. **M¹ 8 g, M⁴ m.**

BOIDI (Gioacchino). Usi della Geometria elementare estesi alle curve discontinue. [*Op. S. B.*, v. III, pp. 276-278 (1819)].

4172. **M¹ 8 g, M² 9 e, Q 2.**

BELTRAMI (Eugenio). Considerazioni analitiche sopra una proposizione di STEINER. (Memoria letta li 9 novembre 1876). [*R. I. B.*, a. 1876-77, pp. 10-12; *M. I. B.*, s. III, t. VII, pp. 241-262 (1876)].

4173. **M² 1, M² 7 a, M² 7 c, M² 7 d, M³ 1, L².**

CREMONA (Luigi). Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Memoria 1ª, Memoria 2ª. (Lette li 26 aprile 1866). [*R. I. B.*, a. 1865-66, pp. 76-77; a. 1866-67, pp. 72-73; *M. I. B.*, s. II, t. VI, pp. 91-136 (1866); t. VII, pp. 29-78 (1867)].

4174. **M² 4 b, M² 4 c.**

CREMONA (Luigi). Sulle superficie gobbe di 4° grado. (Memoria letta li 30 aprile 1868). [*R. I. B.*, a. 1867-68, pp. 96-98; *M. I. B.*, s. II, t. VIII, pp. 235-250 (1868)].

M² 4 d. (*Vedi* n° 4147).

M² 7 a. (*Vedi* n° 4173).

M² 7 c. (*Vedi* n° 4173).

M² 7 d. (*Vedi* n° 4173).

M² 9 c. (*Vedi* n° 4170).

M² 9 e. (*Vedi* n° 4172).

M³ 1. (*Vedi* n° 4173).

M³ 4 a. (*Vedi* n° 4147).

4175. **M³ 5, M³ 5 h α.**

CREMONA (Luigi). Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe e in ispecie sulla parabola gobba. (Memoria letta li 26 novembre 1863). [*R. I. B.*, a. 1863-64, pp. 25-28; *M. I. B.*, s. II, t. III, pp. 385-398 (1863)].

M^3 5. (*Vedi* n° 4147).

4176. **M^3 6 a.**

CREMONA (Luigi). Intorno alla curva gobba del quart'ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado. [*R. I. B.*, a. 1860-61, pp. 58-63].

M^3 6 a. (*Vedi* n° 4147).

4177. **M^4 b.**

MASETTI (Giambattista). Proprietà geometriche, e meccaniche di alcune curve trascendenti. [*Op. S. B.*, v. IV, pp. 179-194 (1823)].

4178. **M^4 b.**

CALLEGARI (Pietro). Sulla identità della trattoria coll'evolvente della catenaria omogenea, e di questa curva con una curva discussa da Schubert. [*Op. S. B.*, a. 1824, pag. 233].

4179. **M^4 b α, M^4 m.**

RICCATI (Vincentius). De natura, et proprietatibus quarumdam curvarum quæ simul cum tractoria generantur, quæque proinde syntractoriæ nominabuntur. [*C. I. B.*, t. III, pp. 479-503 (1755)].

M^4 m. (*Vedi* n° 4171).

4180. **N^1 1 a, N^1 1 b, N^1 1 c.**

CHELINI (Domenico). Sulla nuova geometria dei complessi. (Memoria letta li 4 maggio 1871). [*R. I. B.*, a. 1870-71, pp. 74-75; *M. I. B.*, s. III, t. I, pp. 123-153 (1871)].

4181. **N^1 1 i.**

ASCHIERI (Ferdinando). Sopra un particolare complesso di rette del 2° grado. (Memoria letta li 20 marzo 1879). [*R. I. B.*, a. 1878-79, pag. 97; *M. I. B.*, s. III, t. X, pp. 549-574 (1879)].

4182. **O 2 a, L^1 9.**

MAGISTRINI (Giovanni). Rettificazione delle linee curve e quadratura delle figure curvilinee. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. XII, pag. 358 (1835)].

4183. **O 2 a, O 2 c, H 2 c.**

PIANI (Domenico). Sopra artifizi analitici di G. Manfredi e F. M. Zanotti. (Memoria letta li 20 novembre 1851). [*M. I. B.*, t. IV, pp. 329-341 (1853)].

O 2 a. (*Vedi* n° 4082).

O 2 b. (*Vedi* n° 4166).

4184. **O 2 e.**

RICCATI (Jacob). Problema: Data quacumque ratione radio osculi per curvam describendam curvam [illegible] I. p. III, pp. 159-171 (1747)].

4185. **O 2 e.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Della ragione che i raggi di curvatura di una linea piana hanno a quelli della sua evoluta. [*R. I. B.*, a. 1885-86, pag. 38; *M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 715-730 (1884)].

O 2 n. (*Vedi* n° 4202).

4186. **O 2 q, O 2 p, R 2 o.**

CHELINI (Domenico). Interpretazione geometrica di formole essenziali alle scienze dell'estensione, del moto e delle forze. (Memoria letta li 16 gennaio 1873). [*M. I. B.*, s. III, t. III, pp. 205-246 (1873)].

O 2 q. (*Vedi* n° 4165).

4187. **O 2 q α, O 6 r α.**

MAGISTRINI (Dominicus). Analysis superficiei, quæ locum geometricum est projectionum orthogoniarum puncti cujuslibet super plana sphæram tangentia; nec non curvæ, quæ locum geometricum est projectionum orthogoniarum puncti super rectas in circulum tangentes. [*N. C. I. B.*, t. X, pp. 195-211 (1849)]

4188. **O 3 a.**

FAIS (Antonio). Nota intorno alle curve gobbe aventi le stesse normali principali. (Memoria letta li 8 novembre 1877). [*M. I. B.*, s. III, t. VIII, pp. 609-624 (1877); t. IX, pp. 657-674 (1878)].

4189. **O 4 b α.**

FAIS (Antonio). Sulle principali proprietà delle traiettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate. (Memoria letta li 20 novembre 1879). [*M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 67-97 (1880)].

4190. **O 4 d, H 5 a, H 12 b.**

PIANI (Domenico). Esercizi di algebra pura ed applicata. [*N. C. I. B.*, t. X, pp. 570-607 (1849)].

4191. **O 5.**

PADOVA (Ernesto). Sulla teoria generale delle superficie. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 745-772 (1889)].

4192. **O 5 a, Q 1 a.**

BEDETTI (Julius). De superficierum curvarum quadratura dissertatio. In qua nonnulla de earum curvatura, Archimedisque postulato traduntur. [*N. C. I. B.*, t. VI, pp. 341-389 (1844)].

4193. **O 5 b.**

MAGISTRINI (Dominicus). Investigatio figurarum geometrice quadrabilium in superficie coni recti. [*N. C. I. B.*, t. VIII, pp. 427-434 (1846)].

4194. **O 5 c, O 5 d, O 5 f.**
BEDETTI (Julius). De plano tangente. [*N. C. I. B.*, t. V, pp. 485-523 (1842)].

4195. **O 5 c.**
BEDETTI (Giulio). Delle rette normali alle superficie curve. [*N. C. I. B.*, t. X, pp. 523-569 (1849)].

O 5 d. (*Vedi* n° 4194, 4196).

O 5 e. (*Vedi* n° 4196).

4196. **O 5 f, O 5 d, O 5 e, O 5 p.**
CHELINI (Domenico). Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo. (Memoria letta li 14 maggio 1868). [*R. I. B.*, a. 1867-68, pp. 119-120; *M. I. B.*, s. II, t. VIII, pp. 29-76 (1868)].

O 5 f. (*Vedi* n° 4194).

4197. **O 5 i α.**
RAZZABONI (Amilcare). Alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane. [*R. I. B.*, a. 1878-79, pp. 129-130; *M. I. B.*, s. III, t. X, pp. 529-536 (1879)].

4198. **O 5 l α.**
RAZZABONI (Amilcare). Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema coniugato. [*M. I. B.*, s. IV, t. IX, pp. 765-776 (1888)].

4199. **O 5 m.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Di alcune proprietà della rappresentazione sferica del Gauss. [*R. I. B.*, a. 1887-88, pag. 24; *M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 661-680 (1887)].

O 5 p. (*Vedi* n° 4196).

4200. **O 6 c.**
PIRONDINI (Geminiano). Sugli inviluppi di piani e di sfere. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 47; *M. I. B.*, s. IV, t. IX, pp. 641-683 (1888)].

4201. **O 6 h.**
BELTRAMI (Eugenio). Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima. (Memoria letta li 5 marzo 1868). [*R. I. B.*, a. 1867-68, pp. 71-72; *M. I. B.*, s. II, t. VII, pp. 411-481 (1867)].

4202. **O 6 q, O 2 n.**
CHELINI (Domenico). Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e sulle superficie. (Memoria letta li 14 gennaio 1869). [*R. I. B.*, a. 1868-69, pp. 41-42; *M. I. B.*, s. II, t. VIII, pp. 483-533 (1868)].

O 6 r α. (*Vedi* n° 4187).

4203. **P 1, P 2.**

ASCHIERI (Ferdinando). Sulle forme collineari e reciproche nell'ordinaria geometria. [*R. I. B.*, a. 1879-80, pag. 42; *M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 145-150 (1880)].

4204. **P 1 b.**

CREMONA (Luigi). Intorno alla trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell'altra una sola retta. [*R. I. B.*, a. 1861-62, pp. 88-91].

4205. **P 1 b, P 1 c.**

BOSCHI (Pietro). Alcune proprietà delle forme geometriche fondamentali collineari di 2ª e di 3ª specie aventi elementi uniti. (Memoria letta li 7 aprile 1881). [*R. I. B.*, a. 1880-81, pag. 96; *M. I. B.*, s. IV, t. II, pp. 506-513 (1880)].

4206. **P 1 d.**

RETALI (Virginio). Sulle coniche coniugate. [*M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 189-198 (1884)].

P 2 (*Vedi* n° 4203).

4207. **P 2 d.**

RETALI (Virginio). Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione immaginaria delle curve del second'ordine [*R. I. B.*, a. 1885-86, pag. 72; *M. I. B.*, s. IV, t. VII, pp. 601-632 (1886)].

4208. **P 2 d.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Delle coniche polari inclinate per l'angolo zero principalmente in rispetto alle coniche coniugate. [*R. I. B.*, a. 1886-87, pp. 18-20; *M. I. B.*, s. IV, t. VII, pp. 753-772 (1886)].

4209. **P 2 d.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Di alcune proprietà delle coniche coniugate. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 14; *M. I. B.*, s. IV, t. IX, pp. 499-536 (1888)].

4210. **P 4 b.**

RETALI (Virginio). Sopra particolari trasformazioni piane quadratiche. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 653-671 (1889)].

P 4 b. (*Vedi* nⁱ 4156, 4168).

4211. **P 4 c.**

CREMONA (Luigi). Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. (Memoria prima e Memoria seconda, lette li 7 maggio 1863 e li 15 dicembre 1864). [*M. I. B.*, s. II, t. II, pp. 621-630 (1862); t. V, pp. 3-35 (1865)].

4212. **P 4 c.**
CREMONA (Luigi). Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. [*R. I. B.*, a. 1872-73, p. 148-149].

4213. **P 4 c, I 19 c.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Sulla risoluzione delle due equazioni di condizione delle trasformazioni Cremoniane delle figure piane. (Memoria letta li 19 aprile 1877). [*M. I. B.*, s. III, t. VIII, pp. 457-525 (1877)].

4214. **P 4 c, I 19 c.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Di un problema di analisi indeterminata, che s'incontra nella teoria geometrica delle trasformazioni delle figure piane. (Memoria letta li 28 marzo 1878). [*R. I. B.*, a. 1876-77, pp. 105-108; a. 1877-78, pag. 121; *M. I. B.*, s. III, t. IX, pp. 199-215 (1878)].

4215. **P 4 g.**
CREMONA (Luigi). Sulla trasformazione razionale di 2° grado nello spazio, la cui inversa è del 4° grado. (Memoria letta li 4 maggio 1871). [*M. I. B.*, s. III, t. I, pp. 365-386 (1871)].

4216. **P 5 a α.**
CREMONA (Luigi). Rappresentazione piana d'una certa superficie di quart'ordine dotata di quattro punti doppi. [*R. I. B.*, a 1870-71, pp. 75-76].

4217. **P 5 a α.**
CREMONA (Luigi). Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali. (Memoria letta li 12 aprile 1872). [*R. I. B.*, a. 1871-72, pp. 83-84; *M. I. B.*, s. III, t. II, pp. 117-127 (1872)].

4218. **Q 1 a.**
PORCHIESI (Augusto). Sopra una corrispondenza tra lo spazio non euclideo ed il piano euclideo. [*M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 421-452 (1883)].

Q 1 a. (*Vedi* n° 4192).

Q 2. (*Vedi* n° 4172).

4219. **R 1 c.**
CHELINI (Domenico). Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. (Memoria letta li 13 marzo 1862). [*R. I. B.*, a. 1861-62, pp. 79-80; *M. I. B.*, s. II, t. I, pp. 361-429 (1862)].

4220. **R 1 f.**
GAUTERO (Giacinto). Di una classe di meccanismi a tre membri. [*M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 203-208 (1880)].

4221. **R 1 f.**
MASI (Francesco). Dei giunti derivati dal quadrilatero sferico. [*M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 349-358 (1880)].

4222. **R 2 b.**
RICCATI (Vincentius). De centro æquilibrii. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 215-232 (1747)].

4223. **R 2 b.**
MATTEUCCI (Petronius). Animadversiones quædam pro minimo, quod in æquilibrio virium invenitur juxta distantiarum functionem quamlibet attrahentium. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 90-97 (1757)].

4224. **R 2 b.**
PIANI (Domenico). Sul centro di gravità. Considerazioni storico-critiche. (Memoria letta li 13 febbraio 1868). [*R. I. B.*, a. 1867-68, pp. 57-66; *M. I. B.*, s. II, t. X, pp. 392-434 (1870)].

4225. **R 2 c.**
CHELINI (Domenico). Sull'uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei momenti d'inerzia. (Memoria letta li 6 aprile 1865). [*R. I. B.*, a. 1864-65, pag. 54; *M. I. B.*, s. II, t. V, pp. 143-175 (1865)].

4226. **R 2 c.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Dell'uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dell'ellissoide d'inerzia. (Memoria letta li 16 dicembre 1880). [*R. I. B.*, a. 1880-81, pp. 18-19; *M. I. B.*, s. IV, t. II, pp. 157-164 (1880)].

4227. **R 2 c.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Sull'ellissoide di Culmann. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pag. 21; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 9-42 (1881)].

4228. **R 2 c.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Dell'ellissoide di Culmann in alcuni casi particolari. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pag. 78; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 283-289 (1881)].

4229. **R 2 c.**
RUFFINI (Ferdinando Paolo). Degli inviluppi nulli della classe seconda di un dato sistema di punti affetti da coefficienti dati. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pp. 9-10; *M. I. B.*, s. IV, t. IV, pp. 123-158 (1882)].

R 2 c. (*Vedi* n° 4186).

4230. **R 3 c.**
CHELINI (Domenico). Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti. (Memoria letta li 12 marzo 1870). [*R. I. B.*, a. 1869-70, pag. 86; *M. I. B.*, s. II, t. X, pp. 343-391 (1870)].

R 3 c. (*Vedi* n° 4138).

4231. **R 4.**

CASALI (Gregorius). De cochlea. [*C. I. B.*, t. III, pp. 303-311 (1755)].

4232. **R 4 a.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). De motu composito. [*C. I. B.*, t. I, pp. 515-522 (1731)].

4233. **R 4 a.**

RICCATI (Vincentius). De causa physica compositionis et resolutionis virium. [*C. I. B.*, t. II, p. II, pp. 305-330 (1746)].

4234. **R 4 a.**

RICCATI (Vincentius). De æquivalentia potentiarum per principia metaphysica demonstrata. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 186-197 (1767)].

4235. **R 4 a.**

RICCATI (Vincentius). Additamentum ad Epistolam de potentiarum æquivalentia. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. 219-222 (1767)].

4236. **R 4 a.**

BERTELLI (Francesco). Ricerche sperimentali circa la pressione de' corpi solidi nei casi in cui la misura di esse, secondo le analoghe teorie meccaniche, si manifesta indeterminata e intorno alla relazione fra le pressioni e la elasticità de' corpi medesimi. [*M. I. B.*, t. I, pp. 431-461 (1850)].

4237. **R 4 a.**

FAGNOLI (Giuseppe). Riflessioni intorno la teorica delle pressioni che un corpo o sistema di forma invariabile esercita contro appoggi rigidi ed irremovibili dai quali è sostenuto in equilibrio. (Memoria letta li 15 aprile 1852). [*M. I. B.*, t. IV, pp. 109-138 (1853)].

4238. **R 4 a, R 8 a.**

CHELINI (Domenico). Sugli assi centrali delle forze e delle rotazioni nell'equilibrio e nel moto dei corpi. (Memoria letta li 26 aprile 1866). [*R. I. B.*, a. 1865-66, pp. 75-76; *M. I. B.*, s. II, t. VI, pp. 3-55 (1866)].

4239. **R 4 a.**

FAIS (Antonio). Nota intorno ad alcune proprietà delle rette coniugate e dei piani polari relativi alle forze applicate ad un sistema di forma invariabile. (Memoria letta li 19 aprile 1877). [*M. I. B.*, s. III, t. VII, pp. 605-611 (1876)].

4240. **R 4 a.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Della costruzione geometrica dell'asse centrale di un dato sistema di forze e di alcune proprietà delle rette, che nel sistema dato sono

caratteristiche di piani. [*R. I. B.*, a. 1884-85, pp. 11-14; *M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 85-94 (1884)].

4241. **R 4 b.**

CANTERZANI (Sebastianus). De curvæ catenariæ æquatione. [*C. I. B.*, t. VI, pp. 265-269 (1783)].

4242. **R 4 b.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Dell'equilibrio dei poligoni piani di forma invariabile. (Memoria letta li 9 gennaio 1879). [*R. I. B.*, a. 1878-79, pp. 38-39; *M. I. B.*, s. III, t. X, pp. 3-22 (1879)].

4243. **R 4 b** α.

BELTRAMI (Eugenio). Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pp. 53-56; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 217-265 (1881)].

4244. **R 4 e.**

CARDINALI (Francesco). Soluzione di un problema meccanico. [*R. I. B.*, a. 1824, pp. 143-150].

4245. **R 5 a.**

CANTERZANI (Sebastianus). De attractione sphæræ. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 65-70 (1767)].

4246. **R 5 a.**

BELTRAMI (Eugenio). Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale. (Memoria letta li 9 maggio 1878). [*R. I. B.*, a. 1878-79, pp. 162-163; *M. I. B.*, s. III, t. IX, pp. 451-475 (1878)].

4247. **R 5 a.**

BELTRAMI (Eugenio). Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. (Memoria letta li 28 aprile 1881). [*R. I. B.*, a. 1880-81, pag. 112; *M. I. B.*, s. IV, t. II, pp. 461-505 (1880)].

4248. **R 5 a, T 2 a.**

BELTRAMI (Eugenio). Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. [*R. I. B.*, a. 1884-85, pp. 76-78; *M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 401-448 (1884)].

4249. **R 5 a** α.

BELTRAMI (Eugenio). Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pag. 41; *M. I. B.*, s. IV, t. IV, pp. 211-246 (1882)].

4250. **R 5 b.**

CHELINI (Domenico). Sulla attrazione degli ellissoidi. [*R. I. B.*, a. 1860-61, pp. 43-47].

4251. **R 5 b.**

CHELINI (Domenico). Della legge onde un ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione da punto a punto. (Memoria letta li 21 febbraio 1861). [*M. I. B.*, s. II, t. I, pp. 3-52 (1862)].

4252. **R 5 b.**

BELTRAMI (Eugenio). Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi. (Memoria letta li 8 aprile 1880). [*R. I. B.*, a. 1879-80, pp. 110-111; *M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 572-616 (1880)].

4253. **R 6 b.**

BONFIOLI MALVEZI (Alphonsus). De Maupertuisiano Minimæ Actionis principio. [*C. I. B.*, t. VI, pp. 315-343 (1783)].

4254. **R 7 a.**

RICCATI (Jacob). De motuum communicationibus ex attractione. [*C I B.*, t. II, p. III, pp. 143-158 (1747)].

4255. **R 7 a.**

BOSCOVICK (Rogerius Joseph). De viribus vivis. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 289-332 (1747)].

4256. **R 7 b.**

BOSCOVICK (Rogerius Joseph). De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decrescentibus in ratione distantiarum reciproca duplicata in spatiis non resistentibus. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 262-288 (1747)].

4257. **R 7 b.**

RICCATI (Vincentius). De motibus liberis et curvilineis corporum proiectorum, quæ sese attrahunt per funem inextensibilem transeuntem per datum punctum. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. 150-168 (1767)].

4258. **R 7 b, L¹ 3 b.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). Epistola ad Torquatum Varenum in qua primum de luce agitur, tum pauca indicantur de motu corporum initiali. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. 349-368 (1767)].

4259. **R 7 b.**

DAINELLI (Ugo). Sopra la velocità e l'accelerazione di un punto soggetto ad una forza centrale. [*R. I. B.*, a. 1883-84, pag. 73; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 311-[illegible] (1883)].

4260. **R 7 b α.**

FRISIUS (Paulus). De motu [illegible] [illegible]. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. [illegible] (1767)].

4261. **R 7 b α.**
FRISIUS (Paulus). De acceleratione et retardatione motus planetarum. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. 309-332 (1767)].

4262. **R 7 b α.**
ZANOTTI (Franciscus Maria). De formula planetæ velocitatem exprimente. [*C. I. B.*, t. VII, pp. 230-240 (1791)].

4263. **R 7 b α.**
BEDETTI (Julius). De revolutionibus duorum corporum se mutuo trahentium. [*N. C. I. B.*, t. VII, pp. 399-462 (1844)].

4264. **R 7 b β.**
BASSI (Laura). De problemate quodam mechanico. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 74-79 (1757)].

4265. **R 7 b β.**
RICCATI (Vincentius). De motibus liberis, et curvilineis in vacuo. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 139-198 (1757)].

4266. **R 7 b β.**
RICCATI (Vincentius). De corpore proiecto, cui præter potentiam servantem rationem reciprocam duplicatam distantiarum a centro, applicatæ sunt aliæ potentiæ duo, quarum una dirigitur ad idem centrum, altera est huic perpendicularis. [*C. I. B.*, t. V, p. II, pp. 421-431 (1767)].

4267. **R 7 b β.**
RICCATI (Vincentius). De motu rectilineo corporis attracti, aut repulsi a centro mobili. [*C. I. B.*, t. VI, pp. 138-166, 167-187, 188-211, 212-229 (1783)].

4268. **R 7 b β.**
DAINELLI (Ugo). Del moto di un punto materiale libero sollecitato da una forza diretta costantemente ad una retta fissa. [*M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 91-101 (1887)].

4269. **R 7 f α.**
RESPIGHI (Lorenzo). Sul moto del pendolo. (Memoria letta li 14 aprile 1853). [*M. I. B.*, t. V, pp. 81-100 (1854)].

4270. **R 7 f α, R 9 b.**
CHELINI (Domenico). Intorno ai principî fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussione de' corpi secondo Poinsot. (Memoria letta li 27 gennaio 1876). [*R. I. B.*, a. 1875-76, pp. 54-64; *M. I. B.*, s. III, t. VI, pp. 409-459 (1875)].

4271. **R 7 f α, R 9 b.**

CHELINI (Domenico). Sopra alcune questioni dinamiche. (Memoria che fa seguito a quella intorno ai principi fondamentali della Dinamica. Letta li 26 aprile 1877). [*R. I. B.*, a. 1876-77, pp. 124-125; *M. I. B.*, s. III, t. VIII, pp. 273-306 (1877)].

4272. **R 7 g.**

RUFFINI (Ferdinando Paolo). Del moto di un punto in una superficie data. [*R. I. B.*, a. 1883-84, pp. 29-30; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 211-230 (1883)].

4273. **R 8 a.**

FRISIUS (Paulus). De rotatione corporum. [*C. I. B.*, t. VI, pp. 45-70 (1783)].

4274. **R 8 a.**

MAGISTRINI (Johannes Baptista). Exercitatio de motu spontaneo corporum fusiformium homogeneorum super æquales, et similes æqualium, et similium spondarum varticalium crepidines insidentium. [*N. C. I. B.*, t. III, pp. 455-501 (1839)].

4275. **R 8 a.**

BERTELLI (Franciscus). De derivatione aliisque proprietatibus formularum, quas Mechanica cælestis usurpatur ad planetarum motus exhibendos, et ad perturbationes definiendas, quibus eorumdem conversiones ea de caussa efficiuntur. [*N. C. I. B.*, t. VI, pp. 123-139 (1844)].

4276. **R 8 a.**

CHELINI (Domenico). Determinazione analitica della rotazione de' corpi liberi secondo i concetti del signor Poinsot. [*R. I. B.*, a. 1859-60, pp. 15-16; *M. I. B.*, t. X, pp. 583-620 (1859)].

R 8 a. (*Vedi* n° 4238).

4277. **R 8 c, R 8 d.**

MASETTI (Giambattista). Teoria dello stato prossimo al moto di una curva rigida qualunque, la quale ravvolgendosi attorno un punto fisso solleva un dato peso. [*Op. S. B.*, a. 1824, pp. 37-48].

4278. **R 9 b.**

RIZZETTI (Joannes), De corporum collisionibus et inde orta motuum communicatione, ad Franciscum M. Zanottum epistola. [*C. I. B.*, t. I, pp. 497-514 (1731)].

4279, **R 9 b.**

MANFREDI (Heraclitus). De viribus ex elastrorum pulsu ortis. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 383-396 [1747)].

4280. **R 9 b.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). De elastris. [*C. I. B.*, t. II, p. III, pp. 413-434, 435-462, 463-472 (1747)].

4281. **R 9 b.**

ZANOTTI (Eustachius). De vi percussionis. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 219-232 (1757)].

4282. **R 9 b.**

MANFREDI (Eustachius). De vi elastica. [*C. I. B.*, t. IV, pp. 233-241 (1757)].

R 9 b. (*Vedi* n^i 4270, 4271).

4283. **R 9 b α.**

ZANOTTI (Franciscus Maria). De reflexionibus globi, qui in plano rectangulo pulsus a prominentibus undique lateribus huc, atque illuc repellitur. [*C. I. B.*, t. I, pp. 557-572 (1731)].

4284. **R 9 c.**

MASETTI (Giambattista). Ricerche analitiche di alcune formole atte a determinare le dimensioni dei muri, che sostengono la spinta delle terre. [*Op. S. B.*, v. III, pp. 341-357 (1819); t. IV, pp. 9-12 (1823)].

4285. **R 9 d.**

MAGISTRINI (Giovanni). Tentativo intorno ad un nuovo metodo di supplire all'azione del vento nella navigazione. [*Op. S. B.*, v. II, pp. 163-184 (1818)].

4286. **S 1 a.**

RESPIGHI (Lorenzo). Considerazioni sulle equazioni generali dell'equilibrio dei fluidi. (Memoria letta li 3 maggio 1855). [*R. I. B.*, a. 1854-55, pag. 73; *M. I. B.*, t. VII, pp. 63-70 (1856)].

4287. **S 2.**

BELTRAMI (Eugenio). Sui principî fondamentali dell'Idrodinamica razionale. Parte I, Parte II, Parte III, Parte IV. (Memoria letta nelle sessioni del 5 gennaio 1871, 11 gennaio 1872, 14 marzo 1872, 12 febbraio 1874). [*R. I. B.*, a. 1871-72, pp. 43-45; a. 1872-73, pag. 22; a. 1873-74, pp. 48-49; *M. I. B.*, s. III, t. I, pp. 431-476 (1871); t. II, pp. 381-437 (1872); t. III, pp. 349-407 (1873); t. V, pp. 443-484 (1874)].

4288. **S 2 a.**

MAGISTRINI (Giovanni). Riflessioni sopra l'integrabilità delle equazioni fondamentali dell'idrodinamica. [*Op. S. B.*, v. I, pp. 98-104 (1817)].

4289. **S 2 a, S 3 b.**

BELLAVITIS (Justus). Observationes de quibusdam solutionibus analyticis problematum ad liquidorum motum pertinentium. [*N. C. I. B.*, t. VIII, pp. 445-480 (1846)].

4290. **S 2 a.**

BRIGHENTI (Maurizio). Considerazioni sulle generali equazioni dell'idrodinamica

e sulle applicazioni che se ne sono fatte finora. (Memoria letta il 27 gennaio 1848). [*M. I. B.*, t. I, pp. 547-561 (1850)].

4291. **S 2 a.**

RAZZABONI (Cesare). Sul modo di dedurre le equazioni generali del moto dei fluidi e le particolari relative al moto lineare del liquidi. [*R. I. B.*, a. 1886-87, pag. 36; *M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 41-48 (1887)].

4292. **S 2 b.**

BELTRAMI (Eugenio). Del moto infinitesimale dei fluidi. [*R. I. B.*, a. 1870-71, pp. 25-26].

4293. **S 2 e.**

BELTRAMI (Eugenio). Intorno al moto piano di un disco ellittico in un fluido incompressibile. [*R. I. B.*, a. 1875-76, pp. 39-43].

4294. **S 2 f, S 3 a.**

RAZZABONI (Cesare). Del moto lineare dei liquidi, tenendo conto della loro viscosità, con applicazione ad alcuni casi d'efflusso. [*R. I. B.*, a. 1882-83, pag. 129; *M. I. B.*, s. IV, t. IV, pp. 689-706 (1882)].

4295. **S 3 a.**

RAZZABONI (Cesare). Sopra alcuni casi d'efflusso di liquidi per vasi comunicanti. [*R. I. B.*, a. 1880-81, pag. 18; *M. I. B.*, s. IV, t. II, pp. 135-146 (1880)].

4296. **S 3 a.**

RAZZABONI (Cesare). Sopra alcuni casi di efflussi laterali. [*R. I. B.*, a. 1884-85, pag. 71; *M. I. B.*, s. IV, t. VI, pp. 341-362 (1884)].

S 3 a. (*Vedi* n° 4294).

4297. **S 3 b.**

MAGISTRINI (Giov. Batt.). Sopra un problema d'idraulica del Ramazzini. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. X, pag. 362 (1834)].

4298. **S 3 b.**

RAZZABONI (Cesare). Del moto delle acque in vasi comunicanti per mezzo di lunghi tubi. [*R. I. B.*, a. 1878-79, pp. 141-142; *M. I. B.*, s. III, t. X, pp. 537-548 (1879)].

4299. **S 3 b.**

RAZZABONI (Cesare). Del moto dell'acqua per vasi discontinui. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pag. 58; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 267-282 (1881)].

4300. **S 3 b.**

RAZZABONI (Cesare). Del moto oscillatorio dell'acqua in due vasi prismatici comunicanti per mezzo di un terzo, tenendo conto della viscosità del liquido [*R. I. B.*, a. 1883-84, pag. 42; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 387-400 (1883)].

S 3 b. (*Vedi* n° 4289).

4301. **S 3 b α.**
VENTUROLI (Joseph). De figura aquæ per alveos defluentis. [*N. C. I. B.*, t. V, pp. 199-206 (1842)].

4302. **S 3 b α.**
RAZZABONI (Cesare). Sul moto dell'acqua per alvei a fondo orizzontale. [*M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 677-687 (1880)].

4303. **S 3 c.**
VENTUROLI (Giuseppe). Sul pendolo idrometrico. [*Op. S. B.*, v. I. pp. 81-84, (1817)].

4304. **S 3 c.**
VENTUROLI (Giuseppe). Sull'asta ritrometrica. [*Op. S. B.*, v. I, pp. 141-144 (1817)].

4305. **S 3 c.**
VENTUROLI (Giuseppe). Sull'ariete idraulico. [*Op. S. B.*, v. I, pp. 177-184 (1817)].

4306. **S 3 c.**
MAGISTRINI (Giovanni). Nuove ricerche sulla teorica e sulle pratiche applicazioni della percossa idraulica. [*Op. S. B.*, v. IV, pp. 61-100, 117-141 (1823)].

4307. **S 3 c.**
MASETTI (Giambattista). Sul pendolo idrometrico. [*Op. S. B.*, v. IV, pp. 217-219 (1823)].

4308. **S 3 c.**
FILOPANTI (Quirico). Di un nuovo strumento idrometrico. [*R. I. B.*, Nuovi annali di scienze naturali, s. I, t. V, pp. 165-235 (1840)].

4309. **T 2 a.**
CANEVAZZI (Silvio). Sull'equilibrio molecolare. [*M. I. B.*, s. III, t. IX, pp. 493-533 (1878)].

4310. **T 2 a, T 5 c.**
BELTRAMI (Eugenio). Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. [*R. I. B.*, a. 1885-86, pag. 47; *M. I. B.*, s. IV, t. VII, pp. 3-38 (1886)].

4311. **T 2 a.**
DONATI (Luigi). Illustrazione al teorema del Menabrea. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 97; *M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 267-274 (1889)].

4312. **T 2 a.**
CANEVAZZI (Silvio). Contributo alla teoria dei sistemi elastici. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 673-686 (1889)].

T 2 a. (*Vedi* n° 4248).

4313. **T 2 a α.**

DONATI (Luigi). Sul lavoro di deformazione dei sistemi elastici. [*M. I. B.*, s. IV, t. IX, pp. 345-367 (1888)].

4314. **T 2 b.**

CANEVAZZI (Silvio). Sopra alcune formole della resistenza dei materiali. [*M. I. B.*, s. IV, t. I, pp. 643-656 (1880)].

4315. **T 2 c.**

RICCATI (Jacob). Veræ et germanæ virium elasticarum leges ex phænomenis demonstratæ. [*C. I. B.*, t. I, pp. 525-542 (1731)].

4316. **T 3 a.**

BOSCOVICK (Rogerius Joseph). De recentibus compertis pertinentibus ad perficiendam Dioptricam. [*C. I. B.*, t. V, p. I, pp. 169-235 (1767)].

4317. **T 4 c.**

BELTRAMI (Eugenio). Di alcuni problemi di propagazione del calore. [*R. I. B.*, a. 1886-87, pag. 64; *M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 291-326 (1887)].

T 5 c. (*Vedi* n° 4310).

4318. **T 6.**

BELTRAMI (Eugenio). Sulla teoria della induzione magnetica secondo Poisson. [*R. I. B.*, a. 1883-84, pag. 85; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 551-584 (1884)].

4319. **T 6.**

RIGHI (Augusto). Studii sulla polarizzazione rotatoria magnetica. [*M. I. B.*, s. IV, t. VII, pp. 443-547 (1886)].

4320. **T 7 c.**

DELLA CASA (Lorenzo). Sulla causa delle correnti indotte nei circuiti conduttori. [*R. I. B.*, a. 1855-56, pag. 93].

4321. **T 7 c.**

PALAGI (Alessandro). Identità di origine delle correnti d'induzione volta-elettrica e di induzione magnetica. [*R. I. B.*, a. 1858-59, pp. 63-64].

4322. **T 7 c.**

RIGHI (Augusto). Sulle forze elementari elettromagnetiche ed elettrodinamiche. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 217-256 (1889)].

T 7 c. (*Vedi* n° 4089).

4323. **U 2.**

SALADINI (Hieronymus). Epistola de cometarum theoria. [*C. I. B.*, t. VII, pp. 314-320 (1791)].

4324. **U 2.**

CATTUREGLI. Determinazione della posizione apparente delle stelle fisse. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. IX, pag. 365 (1834)].

4325. **U 2.**

SAPORETTI (Antonio). Illustrazione del metodo di Gauss sulla determinazione di alcuni principali elementi delle orbite planetarie (eccentricità, parametro, longitudine del perielio sull'orbita) e nuovo metodo di soluzione. [*R. I. B.*, a. 1883-84, pag. 41; *M. I. B.*, s. IV, t. V, pp. 359-372 (1883)].

4326. **U 2.**

SAPORETTI (Antonio). Metodo analitico della determinazione dell'equazione del tempo. [*R. I. B.*, a. 1884-85, pag. 87].

4327. **U 2.**

SAPORETTI (Antonio). Metodo universale per iscoprire speditamente gl'istanti del nascere e del tramontare della Luna in qualsivoglia luogo d'Italia. [*R. I. B.*, a. 1885-86, pag. 16].

4328. **U 2.**

SAPORETTI (Antonio). Secondo metodo analitico della determinazione della equazione del tempo. [*R. I. B.*, a. 1888-89, pag. 55].

4329. **U 4.**

BERTELLI (Franciscus). Evolutio functionis perturbatricis quam involvunt æquationes differentiales motus cujuscumque planetæ viribus tracti aliorum Planetarum, Solisque vi prevalenti, nec non animadversiones in quædam præcipua ejus evolutionis loca, quæ aliquam postulant emendationem. [*N. C. I. B.*, t. VI, pp. 239-277 (1844)].

4330. **U 10 a.**

FIORINI (Matteo). Sulle operazioni trigonometrico-topografiche. [*R. I. B.*, a. 1861-62, pp. 106-111].

4331. **U 10 a.**

RICCARDI (Pietro). Sopra un antico metodo per determinare il semi-diametro della terra. [*R. I. B*., a. 1886-87, pag. 42; *M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 63-68 (1887)].

4332. **U 10 b.**

FIORINI (Matteo). Proiezioni coniche delle carte geografiche. [*R. I. B.*, a. 1868-69, pp. 63-68].

4333. **U 10 b.**

FIORINI (Matteo). Sopra la proiezione cartografica isogonica. [*R. I. B.*, a. 1881-82, pag. 95; a. 1882-83, pag. 109; *M. I. B.*, s. IV, t. III, pp. 499-523 (1881); t. IV, pp. 593-610 (1882)].

4334. **V**

RICCARDI (Pietro). Saggio di una bibliografia euclidea. Parte 1ª, 2ª, 3ª. [*M. I. B.*, s. IV, t. VIII, pp. 401-408, 409-523 (1887); t. IX, pp. 321-343 (1888)].

4335. **V 1 a.**

LAPI (G. B.). Studio delle Matematiche. [*R. I. B.*, Bullettino delle scienze mediche, v. X, pag. 221 (1834)].

4336. **V 1 a.**

PIANI (Domenico). Dialogo intorno all'invenzione degli esponenti. [*Op. S. B.*, v. V, pp. 191-192 (1824)].

4337. **V 1 a.**

PIANI (Domenico). Dialogo sulle amplificazioni successive delle scoperte di Archimede intorno alla proporzione della sfera e del cilindro. [*Op. S. B.*, v. V, pp. 228-232 (1824)].

V 1 a. (*Vedi* nⁱ 4076, 4077).

4338. **V 2.**

PIANI (Domenico). Su la Grande Piramide. [*R. I. B.*, 1858-59, pp. 31-32].

4339. **V 5, V 6, V 7, V 8, V 9.**

RICCARDI (Pietro). Cenni sulla storia della Geodesia in Italia dalle prime epoche fin oltre la metà del secolo XIX. Parte I. Parte II. [*M. I. B.*, s. III, t. X, pp. 431-528 (1879); s. IV, t. IV, pp. 441-506 (1882); s. IV, t. V, pp. 585-682 (1883); *R. I. B.*, a. 1883-84, pp. 44-52].

4340. **V 5 a.**

PIANI (Domenico). Dell'Anno Romano. [*R. I. B.*, a. 1859-60, pp. 26-27].

4341. **V 7.**

GHERARDI (Silvester). De materia quadam ad Mathematicæ Facultatis in veteri Archigymnasio Bononiensi historiam proposita, atque collecta quum opportunitas daretur notitias de P. Bonaventura Cavalieri inquirendi. [*N. C. I. B.*, t. VIII, pp. 519-542 (1846)].

4342. **V 7.**

PREDIERI (Paolo). Della vita e della corrispondenza scientifica e letteraria di Cesare Marsili con Galileo Galilei e Padre Bonaventura Cavalieri. [*M. I. B.*, t. III, pp. 113-143 (1851)].

4343. **V 7.**

GHERARDI (Silvestro). Comunicazione di Documenti sul processo di Galilei. [*R. I. B.*, a. 1868-69, pp. 100-101].

4344. **V 7.**

GHERARDI (Silvestro). Il Processo di Galilei davanti all'Inquisizione. [*R. I. B.*, a. 1870-71, pag. 78].

4345. **V 7.**

PILLORI (Pietro). Sul preteso ritrovamento delle effemeridi Galileiane dei satelliti di Giove. Lettera al Dr. Bedetti. [*R. I. B.*, Nuovi Annali delle scienze naturali, s. I, t. X, pp. 200-236 (1843)].

4346. **V 9.**

MAGISTRINI (Giovanni). Discorso in lode di Luigi Lagrange. [*Op. S. B.*, v. III, pp. 87-116 (1819)].

4347. **V 9.**

PIANI (Domenico). Elogio di Giambattista Magistrini. [*M. I. B.*, t. III, pp. 477-501 (1851)].

4348. **V 9.**

BRIGHENTI (Maurizio). Elogio di Giuseppe Venturoli. [*M. I. B.*, t. IV, pp. 199-223 (1853)].

4349. **V 9.**

SANTAGATA (Domenico). Della vita e delle opere di Domenico Piani. Commentario. [*M. I. B.*, s. III, t. I, pp. 3-47 (1871)].

4350. **V 9.**

RICCARDI (Pietro). Saggio di una Biblioteca matematica italiana del secolo XIX. [*M. I. B.*, s. IV, t. X, pp. 635-651 (1889)].

4351. **X 8.**

MAGISTRINI (Giovanni). Sulla divisione degli strumenti circolari. [*Op. S. B.*, v. II, pp. 323-328 (1818)].

Tomo XIX (1905). — Parte IIª: BIBLIOTECA MATEMATICA.

INDICE

REPERTORIO BIBLIOGRAFICO

DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA.

Fine della Parte 2ª del Tomo XIX (1905).